אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

היחידה להוראת קורסי יסוד

חוברת מבחני ובחני עבר בקורס

חדו"א 1 להנדסה · 214.1.9711

14 בחנים · 61 מבחנים · 597 שאלות

עודכן ב־13.10.2026

תוכן העניינים

החוברת מחולקת לשלושה חלקים: בחנים (עמ׳ 5), מבחנים (עמ׳ 27) ופתרונות (עמ׳ 150). בכל חלק הבחינות מסודרות מהחדשה לישנה, והשאלות בכל בחינה מופיעות לפי הסדר המקורי שלהן.

בטבלאות שלמטה מופיעים, לכל בחינה, מספר העמוד שבו מתחילות השאלות שלה ומספר העמוד שבו מתחילים הפתרונות שלה. לחיצה על שם הבחינה או על מספר עמוד עוברת ישירות לאותו עמוד.

שאלות שבהן נדרש רק לנסח הגדרה או משפט הושמטו, ולכן במספור של חלק מהבחינות יש פערים.

„פתרון רשמי" נלקח מקובצי הפתרון של צוות הקורס. „פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס" נכתב בנפרד ועשוי להכיל טעויות.

בחנים

בחינה	עמוד השאלות	עמוד הפתרונות
תשפ״ו · סמסטר ב׳ · בוחן	5	150
תשפ״ו · סמסטר א׳ · בוחן	6	152
תשפ״ה · סמסטר א׳ · בוחן	9	154
תשפ״ג · סמסטר ב׳ · בוחן	12	158
תשפ״ג · סמסטר א׳ · בוחן	13	160
תשפ״ב · סמסטר ב׳ · בוחן	15	162
תשפ״ב · סמסטר א׳ · בוחן	16	164
תש״פ · סמסטר א׳ · בוחן	18	166
תשע״ט · סמסטר ב׳ · בוחן	19	168
תשע״ט · סמסטר א׳ · בוחן	20	169
תשע״ח · סמסטר ב׳ · בוחן	21	171
תשע״ח · סמסטר א׳ · בוחן	23	174
תשע״ז · סמסטר ב׳ · בוחן	24	175
תשע״ו · סמסטר א׳ · בוחן	26	178

מבחנים

בחינה	עמוד השאלות	עמוד הפתרונות
תשפ״ו · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	27	180
תשפ״ו · סמסטר ב׳ · מועד א׳	30	184
תשפ״ו · סמסטר א׳ · מועד ג׳	33	186
תשפ״ו · סמסטר א׳ · מועד ב׳	35	190
תשפ״ו · סמסטר א׳ · מועד א׳	38	193
תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד ג׳	41	198
תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	43	202

תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד א׳	45	206
תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד ג׳	47	209
תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד ב׳	50	212
תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד א׳	54	215
תשפ״ה · סמסטר א׳ · מבחן לדוגמה	57	217
תשפ״ד · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	60	220
תשפ״ד · סמסטר ב׳ · מועד א׳	61	223
תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד ג׳	62	225
תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	63	227
תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד א׳	65	231
תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד ג׳	67	233
תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד ב׳	70	236
תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד א׳	72	239
תשפ״ב · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	75	242
תשפ״ב · סמסטר ב׳ · מועד א׳	76	244
תשפ״ב · סמסטר א׳ · מועד מיוחד	77	247
תשפ״ב · סמסטר א׳ · מועד ב׳	79	250
תשפ״ב · סמסטר א׳ · מועד א׳	81	253
תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד ג׳	83	256
תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	85	260
תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד א׳	87	265
תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד ג׳	89	268
תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד ב׳	93	270
תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד א׳	97	272
תש״פ · סמסטר ב׳ · מועד ג׳	100	275
תש״פ · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	101	277
תש״פ · סמסטר ב׳ · מועד א׳	102	279
תש״פ · סמסטר א׳ · מועד ב׳	103	282
תש״פ · סמסטר א׳ · מועד א׳	105	284
תשע״ט · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	107	287
תשע״ט · סמסטר ב׳ · מועד א׳	109	290
תשע״ט · סמסטר א׳ · מועד מיוחד	110	292
תשע״ט · סמסטר א׳ · מועד ב׳	112	296
תשע״ט · סמסטר א׳ · מועד א׳	114	299
תשע״ח · סמסטר ב׳ · מועד ג׳	116	303

תשע״ח · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	118	306
תשע״ח · סמסטר ב׳ · מועד א׳	120	309
תשע״ח · סמסטר א׳ · מועד ב׳	121	311
תשע״ח · סמסטר א׳ · מועד א׳	122	312
תשע״ז · סמסטר ב׳ · מועד ג׳	123	314
תשע״ז · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	125	318
תשע״ז · סמסטר ב׳ · מועד א׳	127	322
תשע״ז · סמסטר א׳ · מועד ב׳	129	326
תשע״ז · סמסטר א׳ · מועד א׳	130	327
תשע״ו · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	131	329
תשע״ו · סמסטר ב׳ · מועד א׳	133	332
תשע״ו · סמסטר א׳ · מועד א׳	135	334
תשע״ה · סמסטר ב׳ · מועד ב׳	137	337
תשע״ה · סמסטר ב׳ · מועד א׳	139	339
תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד מיוחד	141	341
תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד ב׳	143	343
תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד א׳	145	346
תשע״ד · סמסטר ב׳ · מועד א׳	147	348
תשע״ד · סמסטר א׳ · מועד ב׳	148	351

חלק א׳: בחנים

תשפ״ו · סמסטר ב׳ · בוחן

שאלה 1א (10 נק׳)

מצאו את כל המספרים הממשיים x המקיימים $|3x-1| \le |1-x|$.

שאלה 1ב (15 נק׳)

הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול (ולא בשום דרך אחרת) כי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+\sin(n)}}{n} = 1.$$

שאלה 2א (15 נק׳)

תהי (a_n) סדרה המקיימת $0 < a_1 < 1$ וגם $a_{n+1} = a_n^2$ לכל $n \ge 1$. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית, מתכנסת ומצאו את גבולה.

שאלה 2ב (10 נק׳)

מצאו את כל הגבולות החלקיים במובן הרחב של הסדרה

$$a_n = \left(\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)^n.$$

שאלה 3א (13 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{9n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{9n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2+n}}}.$$

שאלה 3ב (12 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{n}.$$

שאלה 4א (8 נק׳)

הוכיחו או הפריכו (הסעיפים אינם קשורים): אם $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$ וגם $a_n < b_n$ לכל $n \ge 1$, אז $L_1 < L_2$.

שאלה 4ב (9 נק׳)

הוכיחו או הפריכו (הסעיפים אינם קשורים): אם מתקיים $n^2|a_n| \le n - |a_n|$ לכל $n \ge 1$, אז a_n מתכנסת.

שאלה 4ג (8 נק׳)

הוכיחו או הפריכו (הסעיפים אינם קשורים): אם $a_n \to \infty$ אז קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **150**

תשפ״ו · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 1 (10 נק׳)

מהו התחום שבו מתקיים אי־השוויון $|2x+1| < |x+2|$?

א. $(-\infty, -2)$

ב. $(-1, 1)$

ג. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

ד. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

ה. $(-1, 0)$

שאלה 2 (10 נק׳)

נתונה הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{\sin(n)}{n} + (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$. איזה מהמספרים הבאים הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$?

א. $2 - e^2$

ב. $-1 - e^2$

ג. e^2

ד. $e^2 - 1$

ה. $-e^2$

שאלה 3 (10 נק׳)

נתונה פונקציה f רציפה בקטע $[2, 7]$ ומקיימת $f(2) = 9$ וגם $f(7) = -2$. איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. למשוואה $f(x) + 5 = 3x$ קיים פתרון בקטע $[2, 7]$.

ב. למשוואה $f(x) = \sin x$ קיימים לפחות שני פתרונות בקטע $[2, 7]$.

ג. למשוואה $f(x) = 2^x + 8$ לא קיים פתרון בקטע $[2, 7]$.

ד. למשוואה $f(x) = 3x^2$ קיים פתרון בקטע $[2, 7]$.

ה. למשוואה $f(x) + 10 = x^3$ לא קיים פתרון בקטע $[2, 7]$.

שאלה 4 (10 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה עבורה $a_1 = \frac{1}{4}$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + a_n\right)^2$. איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה הוא 0.

ב. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה הוא 4.

ג. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה הוא $\frac{1}{2}$.

ד. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה הוא 2.

ה. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת.

שאלה 5 (10 נק׳)

נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x}-1}{\sin(a^2x)} & x<0\\ b\cdot(a-2) & x=0\\ (\cos x)^{\frac{\ln 4}{x\ln(1+x)}} & x>0\end{cases}$$

לאילו ערכים של הפרמטרים $a,b\in\mathbb{R}$ הפונקציה f רציפה בנקודה $x=0$?

א. $a=2,b=0$

ב. $a=2,b=\frac{1}{4}$

ג. $a=-2,b=-\frac{1}{8}$

ד. $a=-2,b=-\frac{1}{2}$

ה. לכל ערכי a,b בארבע הסעיפים האחרים, f אינה רציפה ב־$x=0$.

שאלה 6 (10 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. קבעו איזו מן הטענות הבאות **בהכרח נכונה**:

א. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ אז לכל סדרה לא חסומה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}|a_nb_n|=\infty$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$ ו־$a_n\neq 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}a_n^2=\infty$ אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

ד. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ אז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\geq -2$.

ה. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה.

שאלה 7 (10 נק׳)

תהא f פונקציה המקיימת $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$. איזו מן הטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x>a$ מתקיים $f(x)<10$.

ב. קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x<a$ מתקיים $f(x)<17$.

ג. ארבע הטענות האחרות לא בהכרח נכונות.

ד. קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x>a$ מתקיים $f(x)>5$.

ה. קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x<a$ מתקיים $f(x)>2$.

שאלה 8 (10 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $a_n=\frac{n^2+1}{2n^3+1}+\frac{n^2+2}{2n^3+2}+\cdots+\frac{n^2+n}{2n^3+n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. מהו $\lim_{n\to\infty}a_n$?

א. 1

ב. ∞

ג. $\frac{1}{2}$

ד. 0

ה. לא קיים במובן הרחב.

שאלה 9 (10 נק׳)

תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש־$f(x)\neq 0$ וגם $g(x)\neq 0$. איזו מהטענות הבאות **בהכרח נכונה**:

א. אם f רציפה ב־$[a,b]$ ו־g חסומה ב־$[a,b]$ אז $\frac{g}{f}$ חסומה ב־$[a,b]$.

ב. ארבע הטענות האחרות לא בהכרח נכונות.

ג. אם f רציפה ב־(a,b) ו־g חסומה ב־(a,b) אז $\frac{g}{f}$ חסומה ב־(a,b).

ד. אם f רציפה ב־$[a,b]$ ו־g חסומה ב־$[a,b]$ אז $\frac{f}{g}$ חסומה ב־$[a,b]$.

ה. אם f רציפה ב־(a,b) ו־g חסומה ב־(a,b) אז $\frac{f}{g}$ חסומה ב־(a,b).

שאלה 10 (10 נק׳)

מהו ערך הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{2\sin^2(x)}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{1+9x}-\sqrt[8]{1-4x}}{e^{3x}-1}\right)\cdot\ln(1+4x)?$$

א. 0

ב. ∞

ג. $\frac{2}{3}$

ד. $\frac{4}{3}$

ה. $\frac{3}{2}$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **152**

תשפ"ה · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 1

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. אם $f(x)$ חד־חד־ערכית ועל, אז גם $f(x)^3$ חד־חד־ערכית ועל.

ב. אם $f(x)$ חד־חד־ערכית, אז גם $f(x)^2$ חד־חד־ערכית.

ג. אם $f(x)$ על, אז גם $f(x)^2$ על.

ד. אם $f(x)^2$ רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$, אז גם $f(x)$ רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$.

ה. אם $f(x)^2$ גזירה בכל $x\in\mathbb{R}$, אז גם $f(x)$ גזירה בכל $x\in\mathbb{R}$.

שאלה 2

תהיינה f פונקציה זוגית ו־g פונקציה אי־זוגית המוגדרות על כל הישר. נסמן: $h=f\circ g$ ו־$k=f\cdot g$. איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. h היא פונקציה זוגית ו־k היא פונקציה אי־זוגית.

ב. h היא פונקציה אי־זוגית ו־k היא פונקציה זוגית.

ג. h היא פונקציה אי־זוגית ו־k היא פונקציה אי־זוגית.

ד. h היא פונקציה זוגית ו־k היא פונקציה זוגית.

ה. כל הטענות האחרות לא בהכרח נכונות.

שאלה 3

נתונות שלוש סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות: $a_n\le c_n\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. ידוע כי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ ו־$\lim_{n\to\infty}b_n=L^2$ כאשר L מספר סופי. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. אם $L=1$ אז $\lim_{n\to\infty}c_n=1$.

ב. $L\le\lim_{n\to\infty}c_n\le L^2$.

ג. $\lim_{n\to\infty}c_n=0$ אם ורק אם $L=0$.

ד. $\lim_{n\to\infty}c_n=1$ אם ורק אם $L=1$.

ה. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=L$.

שאלה 4

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$. מה מהבאים **לא ייתכן**?

א. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=1$.

ב. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ לא קיים במובן הרחב.

ג. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$.

ד. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e$.

ה. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$.

ו. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים במובן הרחב.

שאלה 5

תהא f פונקציה רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$. נניח כי $f(0) = 12$ ו־$\lim_{x\to\infty} f(x) = -7$. איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. למשוואה $f(x) = 2x + 8$ יש לפחות פתרון אחד בקרן $(0, \infty)$.

ב. אם הפונקציה אינה מונוטונית בקרן $(0, \infty)$, אז למשוואה $f(x) = 5$ יש לפחות שני פתרונות.

ג. למשוואה $f(x) = 17$ אין פתרון בקרן $(0, \infty)$.

ד. למשוואה $f(x) = 3 - x^2$ יש לפחות פתרון אחד בקרן $(0, \infty)$.

ה. למשוואה $f(x) = -7$ אין פתרון בקרן $(0, \infty)$.

שאלה 6

נתונה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} & -1 \le x < 0 \\ B & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+Ax}-1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

לאילו ערכים של הפרמטרים A ו־B, הפונקציה רציפה בנקודה $x = 0$?

א. $A = 4,\ B = 2$

ב. $A = 2,\ B = 2$

ג. $A = 2,\ B = 1$

ד. $A = 4,\ B = 1$

ה. בארבעת האפשרויות האחרות של ערכי הפרמטרים A ו־B, הפונקציה אינה רציפה ב־$x = 0$.

שאלה 7

נתונה

$$f(x) = \begin{cases} (1 + x\sin(5x))^{\frac{\ln 2}{\cos(2x)-\cos(3x)}} & -1 \le x < 0 \\ Ax + B & 0 \le x \le 4 \\ \frac{3\sqrt{1+2x}-9}{\sqrt{x}-2} & x > 4 \end{cases}$$

לאילו ערכים של הפרמטרים A ו־B, הפונקציה רציפה בשתי הנקודות $x = 0$ ו־$x = 4$?

א. $A = 0,\ B = 4$

ב. $A = \frac{4}{3},\ B = 1$

ג. $A = -1,\ B = 2$

ד. $A = -1,\ B = 4$

ה. בארבעת האפשרויות האחרות של ערכי הפרמטרים A ו־B, הפונקציה אינה מקיימת את הנדרש.

שאלה 8

תהיינה f ו־g שתי פונקציות גזירות בנקודה $x=2$. נסמן $h(x)=x^2-2$. נתון כי $f(2)=2, g(2)=2, f'(2)=5$ ו־$g'(2)=-1$.
חשבו את ערך הנגזרת $(g\circ h\circ f)'(2)$.

א. -20

ב. -10

ג. -25

ד. 10

ה. 5

שאלה 9

יהי $p(x)$ הקירוב הלינארי של $f(x)=4\sqrt{1+x}$ בנקודה $x=3$. אזי הערך $p(3.5)$ הוא:

א. 8.5

ב. 11.5

ג. 7.5

ד. 8.25

ה. לפונקציה זו לא קיים קירוב לינארי בנקודה $x=3$.

שאלה 10

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}(x-7)^2\sin\left(\frac{1}{x-7}\right) & x\neq 7\\ 0 & x=7\end{cases}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. f גזירה בנקודה $x=7$ ונגזרתה, f', אינה רציפה בנקודה $x=7$.

ב. f גזירה בנקודה $x=7$ ונגזרתה, f', רציפה בנקודה $x=7$.

ג. f רציפה בנקודה $x=7$ ואינה גזירה בנקודה $x=7$.

ד. f אינה רציפה בנקודה $x=7$.

ה. f גזירה בנקודה $x=7$ ונגזרתה, f', גזירה בנקודה $x=7$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **154**

תשפ״ג · סמסטר ב׳ · בוחן

שאלה 1 (36 נק׳)

נתונה פונקציה

$$y = \frac{1}{\sqrt[6]{x^5 - 2}}$$

א. (8 נק׳) מצאו את תחום הגדרת הפונקציה.

ב. (10 נק׳) מצאו את תמונת הפונקציה.

ג. (8 נק׳) בדקו האם הפונקציה חד־חד־ערכית.

ד. (10 נק׳) האם קיימת פונקציה הפוכה לפונקציה הנתונה? אם כן, רשמו את הפונקציה ההפוכה; אם לא, ציינו את התחום בו קיימת הפונקציה ההפוכה.

שאלה 2א (10 נק׳)

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}, \qquad a_1 > 0.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

שאלה 2ב (10 נק׳)

האם קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = 0 \, ?$$

שאלה 2ג (10 נק׳)

האם קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = 17 \, ?$$

שאלה 3ב (24 נק׳)

נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x-1)}{e^{(x-2)} - e^{-(x-2)}}, & x < 2 \\[2ex] \left(\dfrac{2^{(x-2)} + 8^{(x-2)} + 4^{(x-2)}}{3} \right)^{\frac{1}{x-2}}, & x \geq 2 \end{cases}$$

בדקו האם הפונקציה רציפה על כל הישר. אם קיימות נקודות אי־רציפות מיינו אותן.

שימו לב: בתרגיל זה אין להשתמש בכללי לופיטל.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **158**

תשפ״ג · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 2 (25 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת באופן הבא: $a_1 = 1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת לגבול סופי כאשר n שואף לאינסוף.

שאלה 3 (15 נק׳)

נסמן

$$f(x) = \arctan\left(\ln(x - \lfloor x \rfloor + 1)\right).$$

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות (יש לסמן רק טענה אחת):

א. יש נקודות ב־$\mathbb{R}$ בהן הפונקציה f לא מוגדרת

ב. הפונקציה f לא חסומה

ג. הפונקציה f רציפה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$

ד. לפונקציה f יש אינסוף נקודות אי־רציפות מסוג קפיצה

ה. כל הטענות למעלה לא נכונות

שאלה 4 (15 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n + n^2 + \sin(8n)}{3(2^n + 1) + 5n^2 + \sin(n)}.$$

א. 0

ב. $\frac{1}{3}$

ג. $\frac{1}{5}$

ד. 8

ה. ∞

ו. לסדרה הזאת אין גבול במובן הרחב (כלומר, אין לה גבול סופי או אינסופי)

שאלה 5 (15 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)\cos(5x)}{\sin(2x)\cos(7x)}.$$

א. 0

ב. $\frac{3}{2}$

ג. $\frac{5}{7}$

ד. $\frac{15}{14}$

ה. ∞

ו. הגבול הזה אינו קיים במובן הרחב (כלומר, אין גבול סופי או אינסופי)

שאלה 6 (15 נק׳)

מי מהסדרות $(e_n)_{n=1}^{\infty}, (d_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרות למטה **לא** שואפת לאינסוף כאשר n שואף לאינסוף? יש לסמן רק תשובה אחת.

א. $b_n = a_{2n}$ כאשר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

ב. $c_n = n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

ג. $d_n = (2 - (-1)^n)\sqrt{n}$

ד. $e_n = \frac{n}{n^2+\sqrt{n}+1}$

ה. כל הסדרות למעלה שואפות לאינסוף

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **160**

תשפ״ב · סמסטר ב׳ · בוחן

שאלה 1 (32 נק׳)

נתונה פונקציה

$$y = \frac{1}{\sqrt[6]{x^5 - 2}}$$

א. (8 נק') מצאו את תחום הגדרת הפונקציה.

ב. (8 נק') מצאו את תמונת הפונקציה.

ג. (8 נק') בדקו האם הפונקציה חד־חד־ערכית.

ד. (8 נק') האם קיימת פונקציה הפוכה לפונקציה הנתונה? אם כן, רשמו את הפונקציה ההפוכה, אם לא, אז ציינו את התחום בו קיימת הפונקציה ההפוכה.

שאלה 2א (18 נק׳)

הוכיחו כי לכל קבוע C יש פתרון למשוואה

$$C + x + \arctan(x) = 0.$$

רשמו ניסוח מדויק של המשפט המתאים לשימוש בסעיף זה של השאלה.

שאלה 2ב (16 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to \infty} x \left(\sqrt[x]{2} - 1 \right).$$

בתרגיל זה אין להשתמש בכללי לופיטל.

שאלה 3א (15 נק׳)

נתונה סדרה מספרית

$$\left\{5, 3, 4, 2, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, \ldots\right\}$$

ונתון כי כל איברי הסדרה החל מהאיבר החמישי נמצאים בקטע $(-1, 1)$. רשמו הסבר מתמטי מדויק למה גבול הסדרה אינו שווה לאפס.

שאלה 3ב (19 נק׳)

מצאו את ערכי הפרמטרים a, b כך שהפונקציה הנתונה הופכת לרציפה בנקודות -1 ו־1:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \geq 1 \\ (2 - x^2)^{\frac{2}{x-1}} & -1 \leq x < 1 \\ \log_2(3x + b) & x < -1 \end{cases}$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **162**

תשפ״ב · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 1א (12 נק׳)

מהו ערכו של הגבול הבא?

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x^2-x-2}$$

א. $\frac{1}{36}$

ב. $-\frac{1}{36}$

ג. $\frac{1}{12}$

ד. $-\frac{1}{12}$

שאלה 1ב (21 נק׳)

תהי

$$a_n=\sin\left(\frac{\pi}{6}(n+3)\right).$$

אילו מהסדרות הבאות מתכנסות? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. $b_n=a_{6n}$

ב. $c_n=(a_{3n+3})^2$

ג. $d_n=a_{6n+3}$

ד. $f_n=a_{12n}$

שאלה 2ב (21 נק׳)

תהי

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-e^5}{x-5} & x\neq 5\\ x^2 & x=5.\end{cases}$$

אילו מהתשובות הבאות נכונות? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. f רציפה בכל תחום הגדרתה כי הפונקציות $\frac{e^x-e^5}{x-5}$ ו־x^2 אלמנטריות ולכן רציפות.

ב. $\lim_{x\to 5}f(x)=\lim_{x\to 5}x^2=25$.

ג. $\lim_{x\to 5}f(x)=e$.

ד. אף אחת מהתשובות הנ\"ל.

שאלה 3א (12 נק׳)

נסמן

$$f(x) = \arcsin(\cos(x^2 + 5)).$$

סמנו אילו מהטענות הבאות נכונות: (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. f מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$.

ב. f רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$.

ג. יש ל־f אינסוף נקודות אי־רציפות.

ד. הפונקציה f חסומה.

שאלה 3ב (22 נק׳)

רשמו באילו נקודות x הפונקציה $f(x) = \arcsin(\cos(x^2 + 5))$ גזירה, וחשבו את הערך של $f'(x)$ בנקודות שבהן היא מוגדרת.
נמקו והסבירו בקצרה את תשובתכם.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **164**

תש"פ · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 1 (33 נק׳)

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}2e^{x}, & x\geq 0\\ x+2, & x<0.\end{cases}$$

האם הפונקציה f הפיכה? אם כן, רשמו את הנוסחה לפונקציה ההופכית והסבירו מדוע הנוסחה שרשמתם אכן מתארת את הפונקציה ההופכית. אם f לא הפיכה, הסבירו מדוע.

שאלה 2א (14 נק׳)

על כל אחת מהטענות הבאות, סמנו נכון או לא נכון:

(i) (7 נק׳) סדרה חסומה היא בהכרח מונוטונית.

(ii) (7 נק׳) כל סדרה מחזורית ומונוטונית מתכנסת.

הבהרה: סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת מחזורית אם קיים $k>0$ טבעי כך ש־$a_{n+k}=a_n$ לכל n.

שאלה 2ב (20 נק׳)

חשבו את הגבול הבא או הראו שאינו קיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\right)$$

אין להשתמש בכלל לופיטל.

שאלה 3ב (20 נק׳)

חשבו את הגבול או הראו שאינו קיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x}-1}{3\log_{4}(1+x)}$$

אין להשתמש בכלל לופיטל.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **166**

תשע״ט · סמסטר ב׳ · בוחן

שאלה 1 (25 נק׳)

הוכיחו כי המספר $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ אינו רציונלי.

שאלה 2 (25 נק׳)

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת באופן הבא: $a_1=\sqrt{6}$ ולכל $n\geq 1$ נגדיר $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 3א (12 נק׳)

חשבו את הגבול הבא (אין להשתמש בכלל לופיטל):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)\cdot\arctan(x)}{x^2}$$

שאלה 3ב (13 נק׳)

חשבו את הגבול הבא (אין להשתמש בכלל לופיטל):

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

שאלה 4 (25 נק׳)

הוכיחו כי למשוואה $10x^{2018}=2019x+1$ יש לפחות שני פתרונות ממשיים.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **168**

תשע״ט · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 1ב (4 נק׳)

הראו תוך שימוש בהגדרת הגבול במונחי ε, δ ש־$\lim_{x \to 3}(2x+1) = 7$.

שאלה 2ב (4 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

שאלה 3ב (4 נק׳)

הראו כי הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sin(x)$ מקבלת את הערך 10 ב־$(0, \pi]$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **169**

תשע״ח · סמסטר ב׳ · בוחן

שאלה 1א (10 נק׳)

מצאו את הפונקציה ההפוכה ל־$y = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה.

שאלה 1ב (15 נק׳)

תהי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

הוכיחו כי קיים גבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ ומצאו אותו.

שאלה 2א (13 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$$

שאלה 2ב (12 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$$

שאלה 3א (10 נק׳)

ידוע שגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx^2}-\cos x}{x^4}$$

קיים וסופי (שונה מ־$\pm\infty$). מצאו את ערך הפרמטר k וחשבו את הגבול.

שאלה 3ב (15 נק׳)

נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases} x^m \sin\left(\frac{1}{x^p}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

בדקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים m, p הפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה וגזירה בנקודה $x=0$.

שאלה 4א (15 נק׳)

הוכיחו שבקטע $\left[0,\,\frac{\pi}{4}\right]$ למשוואה

$$(1+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=8x\cdot\tan x$$

קיים לפחות פתרון ממשי אחד.

שאלה 4ב (10 נק׳)

חשבו את הנגזרת של הפונקציה $y=\ln(x-1)$ על פי הגדרת הנגזרת.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **171**

תשע״ח · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 1ב (18 נק׳)

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$$

אין להשתמש בכללי לופיטל בתרגיל זה.

שאלה 2א (15 נק׳)

תהי f פונקציה זוגית וגזירה. האם הנגזרת בהכרח זוגית? בהכרח אי־זוגית? או שלא ניתן להכריע? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2ב (19 נק׳)

מצאו עבור אילו ערכי x הפונקציה f גזירה וחשבו את הנגזרת שלה שם:

$$f(x)=x^{2}\sin\left(\pi\sin(|x|)\right)$$

שאלה 3 (33 נק׳)

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\le 0\\ -x^{2}+1, & x>0\end{cases}$$

האם הפונקציה f הפיכה? אם כן, רשמו את הנוסחה לפונקציה ההופכית והסבירו מדוע הנוסחה שרשמתם אכן מתארת את הפונקציה ההופכית. אם f לא הפיכה, הסבירו מדוע.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **174**

תשע״ז · סמסטר ב׳ · בוחן

שאלה 1א (15 נק׳)

הוכיחו תוך שימוש בהגדרת הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=0$$

שאלה 1ב (10 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2016^n+2017^n}$$

שאלה 2א (12 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+1}\right)^{-x}$$

שאלה 2ב (13 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x\cos x-2}}{x+1+\sin x}$$

שאלה 3 (25 נק׳)

נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}(x+a)^{\frac{b}{x}}, & x<0\\ e^2, & x=0\\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{c}{x}}, & x>0\end{cases}$$

בדקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b,c (בהנחה ש־$a>0$) הפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה בנקודה $x=0$.

שאלה 4א (8 נק׳)

גזרו את הפונקציה הבאה ופשטו את הביטוי של הנגזרת שקיבלתם:

$$f(x)=\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$$

שאלה 4ב (7 נק׳)

גזרו את הפונקציה הבאה ופשטו את הביטוי של הנגזרת שקיבלתם:

$$f(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$$

שאלה 4ג (10 נק׳)

גזרו את הפונקציה הבאה ופשטו את הביטוי של הנגזרת שקיבלתם:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **175**

תשע״ו · סמסטר א׳ · בוחן

שאלה 1 (20 נק׳)

חשבו את גבול הסדרה

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{8n^3+n}}\right)$$

שאלה 2 (20 נק׳)

חשבו את גבול הסדרה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$$

שאלה 3 (20 נק׳)

חשבו את גבול הפונקציה

$$\lim_{x\to 3}\frac{e^{x^2-9}-1}{x^2+x-12}$$

שאלה 4 (20 נק׳)

חשבו את תחום ההגדרה של הפונקציה

$$f(x)=\frac{\arcsin(\log_2 x)}{\sqrt{\sin 2x}+1}$$

שאלה 5 (20 נק׳)

האם לפונקציה $f(x)=\ln^2 x+\ln x-1$ יש שורשים בקטע $[1,e]$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 6 (20 נק׳)

הוכיחו על פי הגדרת הגבול (δ,ϵ) כי

$$\lim_{x\to -7}|3x+20|=1$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **178**

חלק ב׳: מבחנים

תשפ״ו · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (7 נק׳)

נתונה הפונקציה $f(x) = x^x$. חשבו את הגבול $\lim_{x \to 0^+} f(x)$:

א. 0

ב. ∞

ג. 1

ד. e

ה. לא קיים במובן הרחב

שאלה 2 (7 נק׳)

נתונה הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע״י

$$a_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1\right).$$

למה שווה $\lim_{n \to \infty} a_n$?

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. $\frac{5}{2}$

ה. ∞

שאלה 3 (7 נק׳)

נתונה $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[1, 5]$ וגזירה בקטע $(1, 5)$, המקיימת $f(1) = 2$ ובנוסף $f'(x) < 3$ לכל $x \in (1, 5)$. איזה מן הערכים הבאים **לא יכול להיות** הערך של $f(5)$?

א. 13

ב. 14

ג. 10

ד. 0

ה. -17

שאלה 4 (7 נק׳)

נתונה

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2+1}$$

ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, המקיימת $F(0)=\frac{2}{3}$. בחרו את הטענה הנכונה:

א. $F(1)=1$

ב. $F(1)=\pi$

ג. $F(1)=\frac{\pi}{2}$

ד. $F(1)=-2$

ה. $F(1)=0$

שאלה 5 (7 נק׳)

נתונה הפונקציה $f(x)=x+\frac{1}{x}$ בקטע $\left[\frac{1}{2},3\right]$. נסמן ב־$m$ את ערך המינימום של הפונקציה בקטע, וב־M את ערך המקסימום שלה בקטע. מה מהבאים נכון?

א. $M-m=\frac{4}{3}$

ב. $M-m=0$

ג. $M-m=\frac{-2}{3}$

ד. $M-m=\frac{1}{2}$

ה. $M-m=\frac{5}{6}$

שאלה 6 (7 נק׳)

נתונה בפולינום מקלורן של הפונקציה $f(x)=e^{x^2}\cos(x^2)$. למה שווה $f^{(8)}(0)$?

א. $\frac{8!}{(4!)^2}$

ב. $-\frac{8!}{6}$

ג. $\frac{8!}{4!}$

ד. $-\frac{8!}{4}$

ה. 0

שאלה 7א (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int x^2\sin(3x)\,dx.$$

שאלה 7ב (10 נק׳)

הראו כי לכל $x\geq 1$ מתקיים

$$x\ln x\leq\frac{1}{2}(x^2-1).$$

שאלה 8א (10 נק׳)

מצאו קירוב עבור $\ln(1.2)$ עם שגיאה הקטנה מ־$\frac{1}{10^4}$.

שאלה 8ב (10 נק׳)

נסמן

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & x>0\\ a+bx & x\le 0\end{cases}$$

לאילו ערכים של a ו־b הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$?

שאלה 9א (10 נק׳)

נתונה הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי

$$a_1=\sqrt{2},\qquad a_{n+1}=\sqrt{2a_n}.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 9ב (10 נק׳)

הוכיחו או הפריכו: אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ וגם $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=0$, אז g חסומה בקטע $(0,\infty)$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **180**

תשפ״ו · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1 (7 נק׳)

נתונה הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע״י $a_n = n\left(\ln(n+2) - \ln(n)\right)$. למה שווה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

א. ∞

ב. 2

ג. $\frac{1}{2}$

ד. 0

ה. אינו קיים

שאלה 2 (7 נק׳)

נתונה f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$ ורציפה בקטע (a,b). איזו מן הטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. f חסומה בקטע $[a,b]$.

ב. אם f חסומה בקטע $[a,b]$ אז הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$ קיים.

ג. אם $f(a)=f(b)$ אז f חסומה בקטע $[a,b]$.

ד. אם $f(a)=f(b)$ אז f רציפה בקטע $[a,b]$.

ה. ארבע הטענות האחרות לא בהכרח נכונות.

שאלה 3 (7 נק׳)

נתונה $f(x)=x^2e^x+3e^x$ ונסמן ע״י $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, המקיימת $F(0)=5$. בחרו את הטענה הנכונה:

א. $F(1)=e$

ב. $F(1)=2e$

ג. $F(1)=3e$

ד. $F(1)=4e$

ה. $F(1)=5e$

שאלה 4 (7 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\frac{6}{5}x+1}-x+\frac{\sin(x^2)\cos(x)}{x}\right).$$

א. $\frac{3}{5}$

ב. $\frac{9}{10}$

ג. ∞

ד. $\frac{1}{6}$

ה. 0

שאלה 5 (7 נק׳)

כמה נקודות קיצון מקומי יש לפונקציה $f(x) = x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 5x$ בכל הישר הממשי?

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. 4

שאלה 6 (7 נק׳)

פולינום מקלורן מסדר 3 של הפונקציה $f(x) = \sin(\sin(x)) - \cos(\sin(x))$ נתון על ידי:

א. $-1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

ב. $1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

ג. $-1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

ד. $1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

שאלה 7א (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{3\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) + 2\sin^2(x)}\, dx.$$

שאלה 7ב (10 נק׳)

נתון כי f פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$, שמתקיים $f(0) = 3$ וגם כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

הראו כי קיימים c_1, c_2 שונים עבורם $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

שאלה 8א (10 נק׳)

נסמן

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{2x}}{x} & x > 0 \\ a + bx & x \le 0 \end{cases}$$

לאילו ערכים של a ו־b הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$?

שאלה 8ב (10 נק׳)

מצאו קירוב עבור $\sqrt[5]{e}$ עם שגיאה הקטנה מ־$\frac{1}{10^4}$.

שאלה 9א (10 נק׳)

הראו כי לכל $x > 0$ מתקיים

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

שאלה 9ב (10 נק׳)

הוכיחו או הפריכו: אם $a_n \to 0$ ואם $a_n b_n > 1$ לכל n, אז $b_n \to \infty$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **184**

תשפ״ו · סמסטר א׳ · מועד ג׳

שאלה 1 (8 נק׳)

חשבו את הגבול הבא: $\lim_{n\to\infty} n\left(\ln(n+2)-\ln(n)\right)$.

א. 2

ב. 0

ג. 1

ד. e^2

ה. הגבול אינו קיים.

שאלה 2 (8 נק׳)

חשבו את הגבול הבא: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)-3\tan x}{x^3}$.

א. 0

ב. 3

ג. 6

ד. 8

ה. הגבול אינו קיים.

שאלה 3 (8 נק׳)

תהא $f(x)=x^3+4x+1$ ונסמן $g=f^{-1}$. חשבו את $g'(1)$.

א. $\frac{1}{4}$

ב. 0

ג. 1

ד. 3

ה. $\frac{1}{7}$

שאלה 4 (8 נק׳)

נסמן $f(x)=\ln(1+x^3)\cdot\cos(x^4)$. חשבו את $f^{(11)}(0)$.

א. $-\frac{11!}{2}$

ב. 0

ג. $\frac{11!}{3}$

ד. $\frac{11!}{6}$

ה. $-\frac{1}{11!}$

שאלה 5 (8 נק׳)

תהא f גזירה ב־$\mathbb{R}$ ומתקיים $|f'(x)| \le 4$ לכל $x \in \mathbb{R}$. איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה?

א. $|f(x)-f(y)| \le 4|x-y|$ לכל $x,y \in \mathbb{R}$

ב. f קבועה ב־$\mathbb{R}$.

ג. f מונוטונית עולה ב־$\mathbb{R}$.

ד. $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

ה. $f''(x)$ קיימת לכל $x \in \mathbb{R}$.

שאלה 6 (8 נק׳)

נסמן $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx & x \le 2 \\ \ln(x-1) & x > 2 \end{cases}$. לאילו ערכים של a ו־b הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x=2$?

א. $a = \frac{1}{2}, b = -1$

ב. $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

ג. $a = 1, b = -2$

ד. $a = 0, b = 0$

ה. לכל ערכי a,b בארבע הסעיפים האחרים, f אינה גזירה בנקודה $x=2$.

שאלה 7א (10 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י

$$a_1 = 7, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

שאלה 7ב (10 נק׳)

תהא $f : [0,1] \to [0,1]$ פונקציה רציפה. הוכיחו כי קיים $x \in [0,1]$ כך ש־$f(x) = x$.

שאלה 8א (10 נק׳)

ידוע כי הגבול $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} + \sin(bx) - \cos(x) - x^2}{x^3}$ קיים. מצאו את a, b ואת הגבול.

שאלה 8ב (10 נק׳)

מצאו קירוב עבור $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ עם שגיאה הקטנה מ־$\frac{1}{100}$. (ניתן להשאיר תשובה כסכום של שברים)

שאלה 9א (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} + \sqrt{x} \right) dx$$

שאלה 9ב (10 נק׳)

מצאו פונקציה קדומה $F(x)$ לפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^4 - 5x^2 + 6}$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **186**

תשפ״ו · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (8 נק׳)

איזו מהסדרות הבאות **לא** מתכנסת?

א. $a_n = \sqrt[n]{\ln(n)} \cdot \cos(\pi n)$

ב. $a_n = \frac{\sqrt[n]{|\sin(n)|}}{n}$

ג. $a_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \sin(n)$

ד. $a_n = \frac{\ln(n)}{n} \cdot (-1)^n$

ה. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

שאלה 2 (8 נק׳)

יהי $a \in \mathbb{R}$ עבורו הגבול הבא קיים

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax^2} - \cos(x)}{x^4}$$

נסמן את הגבול ב־L. בחרו את הטענה הנכונה:

א. $L = \frac{1}{12}$

ב. $L = \frac{1}{8}$

ג. $L = \frac{1}{24}$

ד. $L = \frac{1}{3}$

ה. $L = \frac{1}{6}$

שאלה 3 (8 נק׳)

תהא f פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ המקיימת $f(8) = -1$. נגדיר $g(x) = \int_0^{x^3} f(t)\,dt$. חשבו את $g'(2)$.

א. -12

ב. -8

ג. -3

ד. -1

ה. -24

שאלה 4 (8 נק׳)

נסמן $f(x) = e^{x^5} \cdot \sin(x^4)$. חשבו את $f^{(14)}(0)$.

א. $\frac{14!}{2}$

ב. 0

ג. $-\frac{1}{14!}$

ד. $\frac{14!}{6}$

ה. $-\frac{2}{14!}$

שאלה 5 (8 נק׳)

נתונה $f(x)$ רציפה וחסומה ב־$\mathbb{R}$. איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה:

א. התמונה של f היא קטע (פתוח, סגור או חצי פתוח חצי סגור)

ב. ל־f יש אסימפטוטה משופעת ב־$(+\infty)$.

ג. אם הגבולות $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ו־$\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיימים אז f מונוטונית ב־$\mathbb{R}$.

ד. f מקבלת מקסימום ומינימום ב־$\mathbb{R}$.

ה. $\lim_{x\to\infty} x\cdot|f(x)| = \infty$.

שאלה 6 (8 נק׳)

נסמן

$$f(x)=\begin{cases}\arctan(x^2) & x<1\\ ax^2+bx+\frac{\pi}{4} & x\geq 1\end{cases}$$

לאילו ערכים של a ו־b הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x=1$?

א. $a=1, b=-1$

ב. $a=-1, b=1$

ג. $a=2, b=1$

ד. $a=0, b=0$

ה. לכל ערכי a,b בארבע הסעיפים האחרים, f אינה גזירה בנקודה $x=1$.

שאלה 7א (10 נק׳)

תהא $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש־$f(x)>0$ לכל $x\in[0,1]$. הוכיחו כי קיים $m>0$ כך ש־$f(x)>m$ לכל $x\in[0,1]$.

שאלה 7ב (10 נק׳)

הראו כי למשוואה $\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-2)^7}=3$ קיים פתרון יחיד בקטע $(1,2)$.

שאלה 8א (10 נק׳)

חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n+1)-\ln(n)}$$

שאלה 8ב (10 נק׳)

מצאו קירוב עבור $\sqrt{17}$ עם שגיאה הקטנה מ־$\frac{1}{100}$, תוך שימוש בפיתוח מקלורן של הפונקציה $f(x)=4\sqrt{1+x}$. (ניתן להשאיר תשובה כסכום של שברים)

שאלה 9א (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int\frac{dx}{7\cos x+4\sin x+9}$$

שאלה 9ב (10 נק׳)

מצאו פונקציה קדומה $F(x)$ לפונקציה $f(x)=\frac{2x^3+x^2+3x+3}{x^2+1}$ המקיימת $F(0)=3$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **190**

תשפ״ו · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (8 נק׳)

נתונה הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n+5} + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

כמה גבולות חלקיים שונים יש לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$?

א. 3

ב. 6

ג. 5

ד. 1

ה. 2

שאלה 2 (8 נק׳)

נתונה $F(x)$ קדומה של $f(x)$, ונתונה $G(x)$ קדומה של $g(x)$. איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה:

א. $F(x) \cdot G(x)$ היא קדומה של $f(x) \cdot G(x) + g(x) \cdot F(x)$.

ב. $e^{F(x)}$ היא קדומה של $f(x) \cdot e^{f(x)}$.

ג. $\sin(F(x))$ היא קדומה של $f'(x) \cdot \cos(f(x))$.

ד. $F(G(x))$ היא קדומה של $f(g(x))$.

ה. $(x^2+1) \cdot F(\arctan(x))$ היא קדומה של $f(\arctan(x))$.

שאלה 3 (8 נק׳)

נתונה $f(x) = (\sin(e^x))^{\cos(x)}$. למה שווה $f'(0)$:

א. $\cos(1)$

ב. 0

ג. 1

ד. $-\sin(1)$

ה. $\sin(e)$

שאלה 4 (8 נק׳)

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2+4x+8}$. איזה מהישרים הבאים הינו האסימפטוטה המשופעת של $f(x)$ ב־$-\infty$?

א. $y = x + 2$

ב. $y = x - 2$

ג. $y = -x + 2$

ד. $y = -x - 2$

ה. לפונקציה אין אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שאלה 5 (8 נק׳)

נתונה $f(x)$ עבורה מתקיים $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$. איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה:

א. $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2n+3}{n+17}\right) = \infty$.

ב. ל־$f(x)$ קיימת נקודת מינימום מקומי.

ג. לכל $c \in \mathbb{R}$ קיים פתרון למשוואה $f(x) = c$.

ד. קיים $b > 2$ עבורו f מונוטונית בקטע $(2, b)$.

ה. $\lim_{x\to 2}(3-x)^{f(x)} = e$.

שאלה 6 (8 נק׳)

נסמן

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x > 0 \\ a\sin(3x) + b\cos(2x) & x \le 0 \end{cases}$$

לאילו ערכים של a ו־b הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$?

א. $a = \frac{1}{6}, b = 1$

ב. $a = \frac{1}{2}, b = 1$

ג. $a = \frac{1}{2}, b = 0$

ד. $a = \frac{1}{6}, b = 0$

ה. לכל ערכי a, b בארבע הסעיפים האחרים, f אינה גזירה בנקודה $x = 0$.

שאלה 7א (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{2x^3 + 4x - 4}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx$$

שאלה 7ב (10 נק׳)

הראו כי קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד המקיים $\arctan(c) + 4c^3 = 10$.

שאלה 8א (10 נק׳)

מצאו $a \in \mathbb{R}$ עבורו מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - \cos(x) - a\sin(x) - x^2}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

שאלה 8ב (10 נק׳)

מצאו קירוב עבור $\sqrt[4]{e}$ עם שגיאה הקטנה מ־$\frac{1}{10^3}$. (ניתן להשאיר תשובה כסכום של שברים)

שאלה 9א (10 נק׳)

מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ בתחום $(0, \infty)$.

שאלה 9ב (10 נק׳)

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{8n+3}}$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **193**

תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

שאלה 1א (11 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת באופן הבא: $a_1 = 3$ ו־$a_{n+1} = \frac{1+\sqrt{4a_n+9}}{2}$ לכל $n \geq 1$. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 1ב (11 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt[5]{1+3x^2} - \cos(2x)\right)\sin(4x)}{e^{3x^3}-1}.$$

שאלה 2א (11 נק׳)

כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $\arctan x = 1 - x$? נמקו!

שאלה 2ב (11 נק׳)

תהא

$$f(x) = \int_{\sin x}^{e^{2x}} \sqrt[4]{1+15t^6}\, dt.$$

חשבו את $f'(0)$.

שאלה 3 (22 נק׳)

נתונה $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)^2}$. חקרו אותה לפי השלבים הבאים: מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות, מצאו נקודות קיצון, מצאו נקודות פיתול וציירו סקיצה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 4א (11 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{\arctan x}{x^3}\, dx.$$

שאלה 4ב (11 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^4+3x^3+3x^2+x}{x^2-2x+10}\, dx.$$

שאלה 5א (12 נק׳)

ידוע שהגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sin x+ax+bx^2}{x^3}$$

קיים וסופי. מצאו את a, b ואת הגבול.

שאלה 5ב (10 נק׳)

האם האינטגרל

$$\int_1^{\infty}\frac{x+6}{x^3+5x^2+6x}\,dx$$

מתכנס? אם כן – מצאו את ערכו. אם לא – נמקו. (אם אתם מחשבים ערך, אין צורך לצמצם את המספר.)

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **198**

תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1א (11 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת באופן הבא: $a_1 = 1$ ו־$a_{n+1} = \frac{9}{6 - a_n}$ לכל $n \geq 1$. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 1ב (11 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt[7]{1+6x} - \sqrt[6]{1-7x}\right)\ln(1+2x)}{1-\cos(3x)}.$$

שאלה 2א (11 נק׳)

לאילו ערכים של a, למשוואה $x^4 + a = ax$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[0,1]$?

שאלה 2ב (11 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_{x^4}^{x^2} \ln\left(1+t^3\right) dt}{x^8}.$$

שאלה 3 (22 נק׳)

נתונה $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$. חקרו אותה לפי השלבים הבאים: מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות, מצאו נקודות קיצון, מצאו נקודות פיתול וציירו סקיצה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 4א (11 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int e^x \cdot \arctan\left(e^x\right) dx.$$

שאלה 4ב (11 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^3+2}{x^3+3x}\, dx.$$

שאלה 5א (12 נק׳)

ידוע שהגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1+ax^2}{1+bx^2} - \cos(2x)}{x^6}$$

קיים וסופי. מצאו את a, b ואת הגבול.

שאלה 5ב (10 נק׳)

האם האינטגרל

$$\int_{10}^{\infty} \frac{6}{x^2 - 9x + 18}\, dx$$

מתכנס? אם כן – מצאו את ערכו. אם לא – נמקו. (אם אתם מחשבים ערך, אין צורך לצמצם את המספר.)

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **202**

תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1א (11 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת באופן הבא: $a_1=\alpha>1$ ו־$a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ לכל $n\geq 1$. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 1ב (11 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+2x}-e^{3x}\right)\sin(2x)}{1-\cos(4x)}.$$

שאלה 2א (11 נק׳)

הוכיחו כי למשוואה $x^4-32x+e\pi=0$ יש לפחות שני פתרונות שונים.

שאלה 2ב (11 נק׳)

נתונה פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה 0 וידוע כי $f(0)=1,\ f'(0)=2$ ו־$f''(0)=3$. נגדיר פונקציה חדשה

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-1}{x} & x\neq 0\\ C & x=0\end{cases}$$

מצאו את הערך של C שעבורו $g(x)$ רציפה בנקודה 0. הראו ש־$g(x)$ גזירה בנקודה 0 וחשבו את $g'(0)$.

שאלה 3 (22 נק׳)

נתונה $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}$. חקרו אותה לפי השלבים הבאים: מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות, מצאו נקודות קיצון, מצאו נקודות פיתול וציירו סקיצה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 4א (11 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int x^7\ln x\,dx.$$

שאלה 4ב (11 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4(x)\cdot\cos(x)}{\sin^{10}(x)+1}\,dx.$$

שאלה 5א (11 נק׳)

ידוע שהגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos x-3\sin(x)+ax^2}{x^3}$$

קיים וסופי. מצאו את a ואת הגבול.

שאלה 5ב (11 נק׳)

האם האינטגרל

$$\int_1^{\infty}\frac{x+2}{x^3+4x}\,dx$$

מתכנס? אם כן – מצאו את ערכו. אם לא – נמקו. (אם אתם מחשבים ערך, אין צורך לצמצם את המספר.)

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **206**

תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד ג׳

שאלה 1 (6 נק׳)

האינטגרל המוכלל (״לא אמיתי״)

$$\int_2^{\infty} \frac{3x+1}{x^3-x}\,dx$$:

א. מתכנס וערכו $\ln(3)+\ln(2)$.

ב. מתכנס וערכו 0.

ג. מתכנס וערכו $\ln(3)$.

ד. מתכנס וערכו $\ln(2)$.

ה. מתבדר.

שאלה 2 (6 נק׳)

הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$:

א. קיים ושווה ל־$\frac{1}{6}$.

ב. קיים ושווה ל־0.

ג. קיים במובן הרחב ושווה ל־∞.

ד. קיים ושווה ל־$\frac{1}{3}$.

ה. לא קיים במובן הרחב.

שאלה 3 (6 נק׳)

נתבונן במשוואה $3x+\arctan x = 2\sin x + 1$. למשוואה זו:

א. יש פתרון ממשי יחיד.

ב. יש בדיוק שני פתרונות ממשיים שונים.

ג. יש בדיוק שלושה פתרונות ממשיים שונים.

ד. אין פתרונות ממשיים כלל.

ה. יש יותר משלושה פתרונות ממשיים שונים.

שאלה 4 (6 נק׳)

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. מה מהבאים **נכון בהכרח**?

א. אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ אז ל־$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ול־$(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ בדיוק אותם גבולות חלקיים.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ אז ל־$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ול־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ בדיוק אותם גבולות חלקיים.

ה. אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n b_n} = 1$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_n b_n}$.

שאלה 5 (6 נק׳)

יהיו a ו־b מספרים ממשיים שעבורם הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-b\sin x-1-2x^2}{x^3}=L$$

קיים וסופי. למה שווה **הגבול**?

א. $L=\frac{5}{3}$.

ב. $L=\frac{1}{3}$.

ג. $L=\frac{7}{3}$.

ד. $L=0$.

ה. $L=\frac{5}{6}$.

שאלה 6 (6 נק׳)

את התחום החסום בין הפונקציות $f(x)=x^2$ ו־$g(x)=|x^3|$ מסובבים סביב ציר ה־x. מהו נפח התחום שנוצר?

א. $\frac{4\pi}{35}$

ב. $\frac{2\pi}{5}$

ג. $\frac{2\pi}{105}$

ד. $\frac{4\pi}{7}$

ה. ארבע התשובות האחרות שגויות.

שאלה 7 (6 נק׳)

נתונה $f(x)=\int_{2}^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,dt$. חשבו את $f'(2)$.

א. $\sin(4)$

ב. $\frac{\sin(4)}{4}$

ג. $2\sin(2)$

ד. $\frac{2\cos(2)-\sin(2)}{4}$

ה. ארבע התשובות האחרות שגויות.

שאלה 8 (6 נק׳)

באיזה מהמצבים הבאים ניתן להשתמש במשפט רול?

א. הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ בקטע $[0,2\pi]$.

ב. הפונקציה $f(x)=x^3$ בקטע $[0,2]$.

ג. הפונקציה $f(x)=e^x$ בקטע $[-1,1]$.

ד. הפונקציה $f(x)=|x|$ בקטע $[-1,1]$.

ה. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $[1,2]$.

שאלה 9 (6 נק׳)

ערך האינטגרל $\int_{-2}^{2}\left(xe^{x^2}-3\sin x\cos^3 x+1\right)dx$ הוא:

א. 4

ב. 0

ג. $4e^4$

ד. e^4+4

ה. 2

שאלה 10 (6 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

איזה מהבאים הינו משיק לגרף הפונקציה ב־$x=0$?

א. $y=2x$.

ב. $y=0$.

ג. $y=2$.

ד. לגרף של f אין משיק ב־$x=0$.

ה. ארבעת התשובות האחרות שגויות.

שאלה 11 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}$$

לפי השלבים הבאים: תחום ההגדרה, תכונות מיוחדות (זוגיות/אי־זוגיות), אסימפטוטות, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 12א (10 נק׳)

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b) ומקיימת $f^2(b)-f^2(a)=a^2-b^2$. הוכיחו כי למשוואה $f(x)\cdot f'(x)+x=0$ קיים לפחות פתרון אחד בקטע (a,b). (רמז: משפט רול)

שאלה 12ב (10 נק׳)

השתמשו בפולינום מקלורן מסדר ראשון כדי למצוא קירוב למספר $\sqrt{13}$ והעריכו את השגיאה בקירוב זה.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **209**

תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (6 נק׳)

האינטגרל המוכלל (״לא אמיתי״)

$$\int_1^\infty \frac{2x+4}{(2x-1)(x^2+1)}\,dx$$:

א. מתכנס וערכו $3\ln(2)$.

ב. מתכנס וערכו 0.

ג. מתכנס וערכו $\ln(3)$.

ד. מתכנס וערכו 4.

ה. מתבדר.

שאלה 2 (6 נק׳)

הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$:

א. קיים ושווה ל־0.5.

ב. קיים ושווה ל־0.

ג. קיים במובן הרחב ושווה ל־$-\infty$.

ד. קיים ושווה ל־-2.

ה. לא קיים במובן הרחב.

שאלה 3 (6 נק׳)

נתבונן במשוואה $x^4+3x=13$. למשוואה זו:

א. יש בדיוק שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. יש פתרון ממשי יחיד.

ג. יש בדיוק שלושה פתרונות ממשיים שונים.

ד. אין פתרונות ממשיים כלל.

ה. יש יותר משלושה פתרונות ממשיים שונים.

שאלה 4 (6 נק׳)

תהיינה $(a_n)_{n=1}^\infty$ ו־$(b_n)_{n=1}^\infty$ שתי סדרות. מה מהבאים **נכון בהכרח**?

א. $L=0$ הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^\infty$ אם ורק אם $L=0$ הוא גבול חלקי של $(|a_n|)_{n=1}^\infty$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ו־$a_n\neq 0$ לכל n אז $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$ או $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=-\infty$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}b_n\le\lim_{n\to\infty}a_n$ אזי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n\le b_n$.

ד. אם קיים $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ והוא סופי, אז שתי הסדרות $(a_n)_{n=1}^\infty$ ו־$(b_n)_{n=1}^\infty$ חסומות.

ה. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ו־$a_n\neq 0$ לכל n אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

שאלה 5 (6 נק׳)

יהי a מספר ממשי שעבורו הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-\cos x-x\sin x}{x^4}=L$$

קיים וסופי. למה שווה **הגבול**?

א. $L=\frac{1}{4}$.

ב. $L=\frac{1}{2}$.

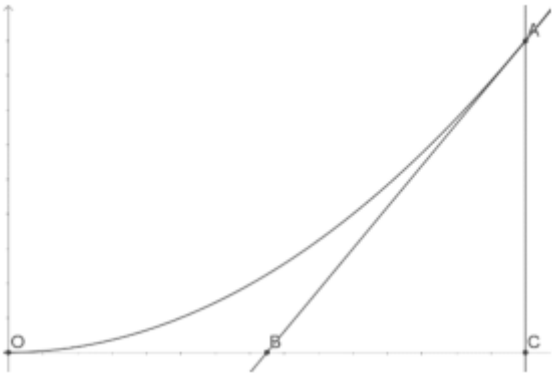
ג. $L=\frac{7}{24}$.

ד. $L=\frac{1}{3}$.

ה. $L=\frac{1}{12}$.

שאלה 6 (6 נק׳)

תהא $a>0$. בנקודה (a,a^2) מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2$. נסמן ב־B את נקודת החיתוך של המשיק הנ״ל עם ציר ה־x. תהא C הנקודה $(a,0)$ ותהא A הנקודה (a,a^2). נסמן ב־O את ראשית הצירים. יהי S_1 שטח הצורה OAC ו־S_2 שטח המשולש BAC. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



א. $\frac{4}{3}$

ב. $\frac{a+1}{a}$

ג. 2

ד. $\frac{3}{2}$

ה. ארבע התשובות האחרות שגויות.

שאלה 7 (6 נק׳)

נתונה $f(x)=\int_x^{\sqrt{x^2+1}}e^{t^2-1}\,dt$. אזי לכל $x\in\mathbb{R}$ הנגזרת, $f'(x)$, שווה ל־

א. $e^{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{e}\right)$

ב. $e^{x^2}\cdot 2x-e^{x^2-1}\cdot 2x$

ג. $2xe^{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}-2x\cdot e^{x^2-1}$

ד. $2\sqrt{x^2+1}\cdot e^{x^2}-2x\cdot e^{x^2-1}$

ה. ארבע התשובות האחרות שגויות.

שאלה 8 (6 נק׳)

תהא f פונקציה גזירה שלוש פעמים בקטע $[-1,1]$. נניח כי $f(-1)=f(1)=f'(-1)=f'(1)=0$. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. קיימת $c\in(-1,1)$ כך ש־$f''(c)=0$ (הנגזרת השנייה).

ב. למשוואה $f(x)=0$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $(-1,1)$.

ג. ל־$f(x)$ אין פולינום מקלורן ממעלה 7.

ד. הפונקציה $f(x)$ בהכרח קבועה בקטע $(-1,1)$.

ה. קיים מספר $\gamma>0$ כך שלמשוואה $f(x)=\gamma$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $(-1,1)$.

שאלה 9 (6 נק׳)

ערך האינטגרל $\int_1^8\left(\frac{3}{x}+e\cdot e^{-x}-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$ הוא:

א. $9\ln(2)-e^{-7}-2$

ב. $3\ln(8)-e^{-7}-6$

ג. $9\ln(2)-e^{-7}+2$

ד. $3\ln(8)-e^{-7}+4$

ה. $2\ln(2)-e^{-7}+3$

שאלה 10 (6 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-3x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. f גזירה ב־0, ומתקיים $f'(0)=-3$.

ב. f גזירה ב־0, מתקיים $f'(0)=0$ ונגזרתה, f' רציפה ב־0.

ג. f אינה גזירה ב־0.

ד. f אינה רציפה ב־0.

ה. f גזירה פעמיים ב־0, ומתקיים $f'(0)=0$ ו־$f''(0)=0$.

שאלה 11 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה

$$f(x)=\frac{1+2x-x^2-x^3}{(x+1)^2}$$

לפי השלבים הבאים: תחום ההגדרה, תכונות מיוחדות (זוגיות/אי־זוגיות), אסימפטוטות, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי״.

שאלה 12א (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2(2x)}\,dx.$$

שאלה 12ב (10 נק׳)

יהי $0 < d < 100$. נסמן: $A = \sqrt{2025 + d} - \sqrt{2025}$ ו־$B = \sqrt{2025} - \sqrt{2025 - d}$. קבעו, תוך שימוש במשפטים שלמדנו, איזה משני המספרים הללו גדול יותר. תשובה ללא נימוק לא תתקבל, ובדיקה במחשבון לא מהווה נימוק. (רמז: משפט לגראנז׳)

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **212**

תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (6 נק׳)

האינטגרל המוכלל (״לא אמיתי״)

$$\int_4^\infty \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$$:

א. מתכנס וערכו $\ln(2)$.

ב. מתכנס וערכו 0.

ג. מתכנס וערכו $\ln(3)$.

ד. מתכנס וערכו 1.

ה. מתבדר.

שאלה 2 (6 נק׳)

הגבול

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln(x)-x+1}$$:

א. קיים ושווה ל־-2.

ב. קיים ושווה ל־0.

ג. קיים במובן הרחב ושווה ל־∞.

ד. קיים ושווה ל־1.

ה. לא קיים במובן הרחב.

שאלה 3 (6 נק׳)

נתבונן במשוואה $x^3+3x^2+3x+10=0$. למשוואה זו:

א. יש פתרון ממשי יחיד.

ב. יש בדיוק שני פתרונות ממשיים שונים.

ג. יש בדיוק שלושה פתרונות ממשיים שונים.

ד. אין פתרונות ממשיים כלל.

ה. יש יותר משלושה פתרונות ממשיים שונים.

שאלה 4 (6 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_1 \geq a_3 \geq a_5 \geq \ldots$ ו־$a_2 \leq a_4 \leq a_6 \leq \ldots$. מה מהבאים **נכון בהכרח**?

א. לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש לכל היותר שני גבולות חלקיים.

ב. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

ג. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת.

ד. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ עולה.

ה. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת.

שאלה 5 (6 נק׳)

יהיו a ו־b מספרים ממשיים שעבורם הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - a\cdot\cos(x^2)+bx^2}{x^4}=L$$

קיים וסופי. למה שווה **הגבול**?

א. $L=\frac{5}{6}$.

ב. $L=\frac{3}{4}$.

ג. $L=\frac{1}{6}$.

ד. $L=\frac{5}{12}$.

ה. $L=\frac{11}{12}$.

שאלה 6 (6 נק׳)

תהא $f(x)=\cos(x)$. נסמן ב־V_x את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב גרף הפונקציה סביב ציר ה־x בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ונסמן ב־V_y את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב גרף הפונקציה סביב ציר ה־y בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. אזי היחס $\frac{V_x}{V_y}$ שווה ל־

א. $\frac{\pi}{2\pi-4}$

ב. $\frac{\pi}{2}$

ג. 1

ד. $\frac{3\pi}{\pi-2}$

ה. ארבע התשובות האחרות שגויות.

שאלה 7 (6 נק׳)

נתונה $f(x)=\int_{x^3}^{10}\sqrt{1+t^2}\,dt$. אזי לכל $x\in\mathbb{R}$ הנגזרת, $f'(x)$, שווה ל־

א. $-\sqrt{1+x^6}\cdot 3x^2$

ב. $\sqrt{101}-\sqrt{1+x^6}$

ג. $\sqrt{1+x^6}\cdot 6x^5$

ד. $\sqrt{1+x^6}$

ה. ארבע התשובות האחרות שגויות.

שאלה 8 (6 נק׳)

תהיינה f ו־g שתי פונקציות גזירות בכל $x\in\mathbb{R}$. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. אם ל־$f(x)$ ול־$g(x)$ יש אסימפטוטה משופעת דו־צדדית אז גם ל־$f(x)+g(x)$ יש אסימפטוטה משופעת דו־צדדית.

ב. אם x_0 נקודת קיצון של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ אז x_0 נקודת קיצון של $f(x)+g(x)$.

ג. אם x_0 נקודת קיצון של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ אז x_0 נקודת קיצון של $f(x)\cdot g(x)$.

ד. אם x_0 נקודת פיתול של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ אז x_0 נקודת פיתול של $f(x)+g(x)$.

ה. אם x_0 נקודת פיתול של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ אז x_0 נקודת פיתול של $f(x)\cdot g(x)$.

טענות ד ו־ה עוסקות בנקודות פיתול, נושא שאינו נכלל בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 9 (6 נק׳)

ערך האינטגרל $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(\sin x)\,dx$ הוא:

א. $\frac{1}{2}(\ln(2)-1)$

ב. $\frac{1}{2}$

ג. $\frac{1}{2}\ln^2(2)$

ד. -1

ה. $\frac{1}{4}\ln(2)$

שאלה 10 (6 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

כאשר $\alpha>0$ קבוע. איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. אם $\alpha>1$ אז f גזירה בכל $x\in\mathbb{R}$.

ב. אם $\alpha>0$ אז f גזירה בכל $x\in\mathbb{R}$.

ג. אם $\alpha\geq 1$ אז f גזירה בכל $x\in\mathbb{R}$.

ד. אם $\alpha>1$ אז f גזירה, ונגזרתה, f', רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$.

ה. אם $\alpha>0$ אז f גזירה ב־$x=0$ ומתקיים $f'(0)=0$.

שאלה 11 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

לפי השלבים הבאים: תחום ההגדרה, תכונות מיוחדות (זוגיות/אי־זוגיות), אסימפטוטות, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי״.

שאלה 12א (10 נק׳)

הוכיחו שלכל $0<x<\pi$ מתקיים $\sin(x)>x-\frac{x^3}{6}$.

שאלה 12ב (10 נק׳)

רוצים לחשב את $\sqrt{e}$ באמצעות פולינום מקלורן לפונקציה $f(x)=e^x$. מהו סדר הפולינום שיש לבחור כדי להיות בטוח שהקירוב שנקבל רחוק מהערך האמיתי לא יותר מ־10^{-5}? נמקו את תשובתכם.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **215**

תשפ״ה · סמסטר א׳ · מבחן לדוגמה

שאלה 1 (6 נק׳)

האינטגרל המוכלל (״לא אמיתי״)

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$:

א. מתכנס וערכו $2\ln(2)$.

ב. מתכנס וערכו 0.

ג. מתכנס וערכו $\frac{3}{4}$.

ד. מתכנס וערכו -3.

ה. מתבדר.

שאלה 2 (6 נק׳)

הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$$:

א. קיים ושווה ל־1.

ב. קיים ושווה ל־2.

ג. קיים במובן הרחב ושווה ל־∞.

ד. קיים ושווה ל־e.

ה. לא קיים במובן הרחב.

שאלה 3 (6 נק׳)

נתבונן במשוואה $x^2 + e^{-x^2} = 3$. למשוואה זו:

א. יש פתרון ממשי יחיד.

ב. יש בדיוק שני פתרונות ממשיים שונים.

ג. יש בדיוק שלושה פתרונות ממשיים שונים.

ד. אין פתרונות ממשיים כלל.

ה. יש יותר משלושה פתרונות ממשיים שונים.

שאלה 4 (6 נק׳)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שאינה שואפת ל־∞. מה מהבאים **נכון בהכרח**?

א. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

ב. לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה מתכנסת לגבול סופי.

ג. לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה חסומה מלעיל.

ד. לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ גבול עליון סופי.

ה. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת.

שאלה 5 (6 נק׳)

הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^4}:$$

א. קיים ושווה ל־$\frac{1}{3}$.

ב. קיים ושווה ל־$\frac{1}{2}$.

ג. קיים במובן הרחב ושווה ל־∞.

ד. קיים ושווה ל־$\frac{1}{8}$.

ה. לא קיים במובן הרחב.

שאלה 6 (6 נק׳)

את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו־$g(x)=\sqrt{x}$ סיבבו סביב ציר ה־x. חשבו את נפח הגוף שהתקבל.

א. $\frac{3\pi}{10}$

ב. $\frac{\pi}{2}$

ג. $\frac{9\pi}{70}$

ד. $\frac{4\pi}{5}$

ה. $\frac{7\pi}{30}$

שאלה 7 (6 נק׳)

הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^5}^{x^4}\sin(t^3)\,dt}{x^{16}}:$$

א. קיים ושווה ל־$\frac{1}{4}$.

ב. קיים ושווה ל־0.

ג. קיים במובן הרחב ושווה ל־∞.

ד. קיים ושווה ל־$\frac{1}{3}$.

ה. לא קיים במובן הרחב.

שאלה 8 (6 נק׳)

תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך שלכל $c\in[a,b]$ למשוואה $f(x)=f(c)$ יש פתרון יחיד. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. אם $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) אז לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f'(x)\neq 0$.

ב. אין ל־$f(x)$ נקודות פיתול.

ג. אין ל־$f(x)$ נקודות קיצון מוחלטות בקטע $[a,b]$.

ד. f עולה ממש בקטע $[a,b]$ או יורדת ממש בקטע $[a,b]$.

ה. לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)=x$.

טענה ב עוסקת בנקודות פיתול, נושא שאינו נכלל בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 9 (6 נק׳)

אורך הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$ מעל הקטע $[-2,-1]$ הוא:

א. $\frac{1}{16}$

ב. $\frac{19}{16}$

ג. $\frac{21}{16}$

ד. $\frac{17}{16}$

ה. $\frac{7}{16}$

שאלה 10 (6 נק׳)

נתונה הפונקציה $f(x)=|x|^3$. מהו המספר **המירבי** n שעבורו $f^{(n)}(0)$ קיימת?

א. $n=0$.

ב. $n=1$.

ג. $n=2$.

ד. $n=3$.

ה. לא קיים n כזה.

שאלה 11 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-2}$$

לפי השלבים הבאים: תחום ההגדרה, תכונות מיוחדות (זוגיות/אי־זוגיות), אסימפטוטות, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 12א (10 נק׳)

נתונים שני מספרים: $a=\operatorname{arccot}2027-\operatorname{arccot}2025$ ו־$b=\operatorname{arccot}2025-\operatorname{arccot}2023$. מבלי להסתמך על מחשבון, קבעו איזה מספר גדול יותר. תשובה שאינה מנומקת היטב לא תזכה בניקוד כלל.

שאלה 12ב (10 נק׳)

רוצים לחשב את $\sin\left(\frac{1}{4}\right)$ באמצעות פולינום מקלורן לפונקציה $f(x)=\sin x$. מהו סדר הפולינום שיש לבחור כדי להיות בטוח שהקירוב שנקבל רחוק מהערך האמיתי לא יותר מ־10^{-4}? נמקו את תשובתכם.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **217**

תשפ״ד · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1א (10 נק׳)

חשבו את גבול הסדרה

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+6}{5n^2+7}\right)^{15n^2+1}.$$

שאלה 1ב (10 נק׳)

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה

$$a_n = 7+\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

שאלה 2א (13 נק׳)

בדקו האם קיימים ערכי הפרמטרים a ו־b כך שהפונקציה הנתונה תהיה רציפה על כל $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\left(1+a^2x-9x\right)^{\frac{1}{x}} & x<0\\ b & x=0\\ 1+x^{-\frac{a}{x}} & x>0\end{cases}$$

שאלה 2ב (12 נק׳)

הוכיחו שקיימת נקודה d כך שמתקיים השוויון (1) ורשמו ניסוח מדויק של משפט בו תשתמשו להוכחה:

$$\sin(x)-\sin(y)=\cos(d)(x-y) \qquad (1)$$

שאלה 3א (15 נק׳)

תהיא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י הנוסחה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{4}(x+1)^2 & x\le 1\\ |x|-1 & x>1\end{cases}$$

האם הפונקציה גזירה בנקודה $x=1$?

שאלה 4א (15 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx.$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד 220

תשפ״ד · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1א (12 נק׳)

הוכיחו כי לכל קבוע ממשי α קיים פתרון למשוואה

$$\frac{x}{2} + \arctan(x) = \alpha$$

והפתרון יחיד.

שאלה 1ב (13 נק׳)

נסחו את משפט ערך הממוצע של לגרנז׳ והשתמשו בו להוכחת אי־השוויון

$$\frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}.$$

שאלה 2א (13 נק׳)

חשבו את הגבול כאשר סדרה נתונה בצורה רקורסיבית:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right).$$

שאלה 2ב (12 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt[x]{5} - 1\right).$$

שאלה 3א (10 נק׳)

תהיא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י הנוסחה

$$f(x) = \begin{cases} x + x\,e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

האם הפונקציה רציפה על כל $\mathbb{R}$?

שאלה 3ב (15 נק׳)

תהיא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י הנוסחה

$$f(x) = \begin{cases} x + x\,e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

בדקו באילו נקודות הפונקציה גזירה ורשמו את הנגזרת בנקודות הנ״ל.

שאלה 4 (25 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_{1}^{e} \sin(\ln x)\,dx.$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **223**

תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

שאלה 1ב (12 נק׳)

הוכיחו לפי הגדרה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+10}{n^3-10}=0.$$

שאלה 2ב (10 נק׳)

נתון כי פונקציה $f(x)$ מונוטונית עולה ופונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת. הוכיחו או הפריכו: המכפלה $f(x)g(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה.

שאלה 3ב (12 נק׳)

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x-1)}{e^{(x-2)}-e^{-(x-2)}}, & x<2\\[2ex] \left(\dfrac{2^{(x-2)}+8^{(x-2)}+4^{(x-2)}}{3}\right)^{\frac{1}{x-2}}, & x\geq 2\end{cases}$$

בדקו האם הפונקציה רציפה על כל הישר. אם קיימות נקודות אי־רציפות מיינו אותן.
שימו לב: בתרגיל זה אין להשתמש בכללי לופיטל.

שאלה 4ב (12 נק׳)

הוכיחו כי לכל $x>1$, בקטע $[1,x]$, מתקיים $e^x\geq ex$.

שאלה 5ב (12 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{e}\frac{dx}{e^x+5}.$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד 225

תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1א (10 נק׳)

רשמו את הגדרת גבול הסדרה. הוכיחו את השוויון הבא תוך שימוש ישיר בהגדרת הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0.$$

שאלה 1ב (10 נק׳)

נסחו את עיקרון קושי להתכנסות סדרות והוכיחו כי הסדרה בעלת הצורה

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

מתכנסת.

שאלה 2א (15 נק׳)

מצאו תחום הגדרה ותמונה של הפונקציה

$$f(x)=\sqrt{2+3x-x^2}.$$

שאלה 2ב (5 נק׳)

בדקו האם הפונקציה

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{4}$$

מחזורית. אם כן, מה המחזור שלה? אם לא, הסבירו למה היא לא מחזורית.

שאלה 3ב (13 נק׳)

בדקו האם קיים ערך הפרמטר K כך שהפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=\frac{\pi}{3}$? אם כן, חשבו את ערך הפרמטר K; אם לא, רשמו סוג של נקודת אי־רציפות.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}, & x\neq\frac{\pi}{3}\\[2mm] K, & x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

שאלה 4א (10 נק׳)

רשמו שלושה איברים ראשונים של פולינום מקלורן (פולינום טיילור סביב הנקודה אפס) עבור הפונקציה

$$f(x)=x^3-2x-\ln(\cos(x)).$$

שאלה 4ב (10 נק׳)

גזרו את הפונקציה

$$F(x)=\int_1^{x^3}\frac{\ln(t)}{t^2}\,dt.$$

שאלה 25ב (15 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{\cos(x)\sin^5(x)}{\sin^{12}(x)+4}\,dx.$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **227**

תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1 (20 נק׳)

נתונה פונקציה

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),\qquad f:[-1,1]\to[0,1].$$

א. (5 נק׳) בדקו האם הפונקציה חד־חד־ערכית, האם הפונקציה על.
ב. (10 נק׳) האם קיימת פונקציה הפוכה לפונקציה הנתונה? אם כן, רשמו את הפונקציה ההפוכה; אם לא, ציינו את התחום בו קיימת הפונקציה ההפוכה.
ג. (5 נק׳) האם הפונקציה מחזורית? אם לא, הסבירו למה. אם כן, רשמו את גודל המחזור.

שאלה 2א (15 נק׳)

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{2+(-1)^n}{2}.$$

רשמו את כל הגבולות החלקיים, וגם $\max(a_n),\ \min(a_n),\ \inf(a_n),\ \sup(a_n)$.

שאלה 2ב (5 נק׳)

האם קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=111\ ?$$

אם קיימת תנו דוגמא. אחרת הסבירו.

שאלה 3ב (15 נק׳)

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right), & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

בדקו האם הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$. אם בנקודה זו הפונקציה לא רציפה, הגדירו את סוג אי־הרציפות בנקודה.

שאלה 4ב (15 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_2^3\frac{dx}{e^x+1}.$$

שאלה 5ב (15 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\tan\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{k}{n}\right).$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **231**

תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד ג׳

שאלה 1 (20 נק׳)

תהא $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־$[0,1]$ וגזירה ב־$(0,1)$ המקיימת כי $f(0)=0$ וגם $f(1)=-1$. הוכיחו כי למשוואה $f'(x)+2x=0$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$. (הערה: לא ניתן להניח כי f' רציפה). צטטו במדויק משפטים עליהם אתם מסתמכים ובדקו כי תנאי המשפטים מתקיימים.

שאלה 2 (20 נק׳)

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש־$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ ו־$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. הוכיחו כי f היא על. צטטו במדויק משפטים עליהם אתם מסתמכים ובדקו כי תנאי המשפטים מתקיימים.

שאלה 3 (10 נק׳)

תהא $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי הנוסחה $f(x)=\sqrt{ax^2+1}+x\sin\left(\frac{b}{x}\right)$ כאשר a,b הם קבועים גדולים ממש מאפס. נתון כי הישר $y=2x+2$ הוא אסימפטוטה משופעת של f באינסוף (כלומר כאשר $x\to\infty$). סמנו מה מהבאים חייב להתקיים (יש רק תשובה אחת נכונה):

א. $a=4,\ b=2$

ב. $a=2,\ b=4$

ג. $a=4,\ b=4$

ד. $a=1,\ b=4$

ה. $a=4,\ b=1$

ו. $a=1,\ b=2$

ז. $a=2,\ b=1$

ח. כל התשובות למעלה לא נכונות.

שאלה 4 (10 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2\arctan(n)}{\sqrt{4n^2+5n+6}}=$$

א. 0

ב. 1

ג. $\frac{3}{4}$

ד. $\frac{3}{2}$

ה. $\frac{1}{2}$

ו. $\frac{3}{5}$

ז. ∞

ח. הגבול לא קיים במובן הרחב (כלומר אין גבול סופי או אינסופי).

שאלה 5 (10 נק׳)

חשבו את נפח הגוף הכלוא על ידי סיבוב גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{\cos^2(x)\sin(x)}$ סביב ציר ה־x בקטע $\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$. הנפח הוא (סמנו את התשובה הנכונה)

א. 0

ב. π

ג. $\frac{\pi}{2}$

ד. $\frac{\pi}{3}$

ה. $\frac{\pi}{4}$

ו. כל התשובות למעלה לא נכונות

שאלה 6 (10 נק׳)

תהא $f(x)=e^{x^2}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right)$. סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

א. $f'(1)=2e+2\sqrt{3}$

ב. $f'(1)=e+2\sqrt{3}$

ג. $f'(1)=2e+\sqrt{3}$

ד. $f'(1)=e+\sqrt{3}$

ה. הפונקציה אינה גזירה ב־$x=1$.

ו. כל הטענות למעלה לא נכונות.

שאלה 7 (10 נק׳)

תהא

$$f(x)=\begin{cases}x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\right) & x>0\\ \frac{1}{x}\left(\sin(x)+2\right) & x<0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

א. הפונקציה f רציפה ב־$x=0$.

ב. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות סליקה ב־$x=0$.

ג. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות עיקרית ב־$x=0$.

ד. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות מסוג קפיצה ב־$x=0$.

ה. כל הטענות למעלה לא נכונות.

שאלה 8 (10 נק׳)

פולינום מקלורן מסדר 6 של $f(x) = e^{x^6}\cos(x^2)$ הוא (בחרו את התשובה הנכונה)

א. $P_6(x) = 1 + \frac{x^4}{2} + x^6$

ב. $P_6(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + x^6$

ג. $P_6(x) = \frac{x^4}{2} + x^6$

ד. $P_6(x) = \frac{x^4}{2} - x^6$

ה. $P_6(x) = \frac{x^2}{2} - x^6$

ו. $P_6(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^6$

ז. כל התשובות למעלה לא נכונות

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **233**

תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (20 נק׳)

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ב־$\mathbb{R}$ כך שהנגזרת השנייה רציפה. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־$a<b$. נתון כי a היא נקודת מינימום מקומית של f וכי b היא נקודת מקסימום מקומית של f. הוכיחו כי קיימת נקודה c בה מתקיים $f''(c)=0$. צטטו במדויק משפטים עליהם אתם מסתמכים ובדקו כי תנאי המשפטים מתקיימים.

שאלה 2 (20 נק׳)

הוכיחו כי הסדרה

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}+\sin(k)}{n^2+2n+5}=\frac{\sqrt{2}+\sin(1)}{n^2+2n+5}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}+\sin(n)}{n^2+2n+5}$$

מתכנסת לגבול סופי ומצאו את הגבול. צטטו במדויק משפטים עליהם אתם מסתמכים ובדקו כי תנאי המשפטים מתקיימים.

שאלה 3 (10 נק׳)

תהא $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי הנוסחה $f(x)=\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. מה מהבאים **לא** נכון? (יש לסמן רק תשובה אחת)

א. הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית של f.

ב. הישר $x=0$ הוא אסימפטוטה אנכית של f.

ג. ל־f יש נקודת מקסימום מקומית.

ד. ל־f יש נקודת מינימום מקומית.

שאלה 4 (10 נק׳)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\int_{\pi}^{x}\cos^3(t)\,dt}{x-\pi}=$$

א. -1

ב. 1

ג. 2π

ד. $\frac{1}{2}$

ה. $\frac{1}{4}$

ו. כל התשובות למעלה לא נכונות.

שאלה 5 (10 נק׳)

$$\int_{2}^{4}\frac{2}{x^2+4x+3}\,dx=$$

א. $2\ln(5)-\ln(3)-\ln(7)$

ב. $\frac{1}{2}\arctan(4)-\frac{1}{2}\arctan(2)+\ln(7)-\ln(3)$

ג. $\frac{1}{4}\arctan(4)-\frac{1}{4}\arctan(2)+\frac{1}{2}\ln(7)-\frac{1}{2}\ln(3)$

ד. $\ln(3)+\ln(7)-2\ln(5)$

ה. כל התשובות למעלה לא נכונות.

שאלה 6 (10 נק׳)

תהא $f(x)=x|x|+\arctan(x^2)$. סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

א. $f'(1)=2$

ב. $f'(1)=\frac{3}{2}$

ג. $f'(1)=3$

ד. $f'(1)=\frac{1}{2}$

ה. הפונקציה אינה גזירה ב־$x=1$.

ו. כל הטענות למעלה לא נכונות.

שאלה 7 (10 נק׳)

תהא

$$f(x)=\begin{cases}x\ln(x^4) & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}.$$

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

א. הפונקציה f רציפה ב־$x=0$.

ב. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות סליקה ב־$x=0$.

ג. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות עיקרית ב־$x=0$.

ד. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות מסוג קפיצה ב־$x=0$.

ה. כל הטענות למעלה לא נכונות.

שאלה 8 (10 נק׳)

תהא $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בקטע $(-1,1)$. נניח כי לכל $x\in(-1,1)$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $|f^{(n)}(x)|\leq(n!)n^2$. נסמן ב־$P_n(x)$ את פולינום מקלורן מסדר n של f. מהו ה־n **הקטן ביותר** עבורו ניתן להבטיח על פי הנתונים על f כי $\left|f\left(\frac{1}{10}\right)-P_n\left(\frac{1}{10}\right)\right|<\frac{1}{100}$?

א. $n=0$

ב. $n=1$

ג. $n=2$

ד. $n=3$

ה. $n=4$

ו. $n=5$

ז. השארית לא קטנה כאשר n גדל ולכן לא קיים n כזה

ח. כל התשובות למעלה לא נכונות.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **236**

תשפ"ג · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (20 נק׳)

יהיו a, b מספרים כך ש־$0 < a < b$. הוכיחו כי מתקיים

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b-a}{a}.$$

צטטו במדויק משפטים עליהם אתם מסתמכים ובדקו כי תנאי המשפטים מתקיימים.

שאלה 2 (20 נק׳)

תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$ המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $|f(x)| \leq 2$. הוכיחו כי למשוואה $f(x) + x^3 = 1$ יש לפחות פתרון אחד. צטטו במדויק משפטים עליהם אתם מסתמכים ובדקו כי תנאי המשפטים מתקיימים.

שאלה 3 (10 נק׳)

תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי הנוסחה $f(x) = xe^{-x}$. סמנו מה מהבאים נכון (יש רק תשובה אחת נכונה).
תזכורת: פונקציה קמורה כלפי מטה נקראת גם פונקציה קעורה, ופונקציה קמורה כלפי מעלה נקראת גם פונקציה קמורה. נקודה x_0 נקראת נקודת פיתול של f אם בסביבה קטנה של x_0 הפונקציה קמורה כלפי מעלה מצד אחד של x_0 וקמורה כלפי מטה מהצד השני.

א. לפונקציה f יש שתי נקודות פיתול.

ב. לפונקציה f יש נקודת פיתול יחידה.

ג. הפונקציה f קמורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה.

ד. הפונקציה f קמורה כלפי מטה בכל תחום הגדרתה.

ה. כל הטענות למעלה לא נכונות.

שאלה זו עוסקת בקמירות, קעירות ונקודות פיתול, נושאים שאינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 4 (10 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)^{n^2} =$$

א. e^2

ב. 1

ג. e

ד. $e^{-\frac{1}{2}}$

ה. ∞

ו. הגבול לא קיים במובן הרחב (כלומר אין גבול סופי או אינסופי).

ז. כל התשובות למעלה לא נכונות.

שאלה 5 (10 נק׳)

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx =$$

א. 0

ב. 1

ג. π

ד. -1

ה. -2

ו. כל התשובות למעלה לא נכונות.

שאלה 6 (10 נק׳)

תהא $f(x) = e^{e^x}\cos(x)$. סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

א. $f'(0) = e^e$

ב. $f'(0) = 2e^e$

ג. $f'(0) = e^e + 1$

ד. $f'(0) = e$

ה. הפונקציה אינה גזירה ב־$x = 0$.

ו. כל הטענות למעלה לא נכונות.

שאלה 7 (10 נק׳)

תהא

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}.$$

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

א. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות מסוג קפיצה ב־$x = 1$.

ב. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות עיקרית ב־$x = 1$.

ג. הפונקציה f רציפה ב־$x = 1$.

ד. לפונקציה f יש נקודת אי רציפות סליקה ב־$x = 1$.

ה. כל הטענות למעלה לא נכונות.

שאלה 8 (10 נק׳)

פולינום מקלורן מסדר 3 של הפונקציה $f(x) = (x+1)^2 + \sin(x)$ הוא

א. $1 + x + x^2 - \frac{x^3}{6}$

ב. $x + x^2 + \frac{x^3}{6}$

ג. $1 + 3x + x^2 - \frac{x^3}{6}$

ד. $x + x^2 - \frac{x^3}{6}$

ה. כל התשובות למעלה לא נכונות.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **239**

תשפ"ב · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1ב (12 נק׳)

חשבו אסימפטוטה משופעת

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

שאלה 2ב (14 נק׳)

האם הפונקציה $f(x)=xe^{-|x|}$ גזירה על כל $\mathbb{R}$?

שאלה 3ב (12 נק׳)

בדקו האם קיים ערך הפרמטר A כך שהפונקציה הנתונה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=\frac{\pi}{4}$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{\tan(x)}-1}{2\sin^2(x)-1} & x\neq\frac{\pi}{4}\\ A & x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

שאלה 4 (17 נק׳)

(יש קשר בין הסעיפים)

א. (5 נק') רשמו את הגדרת הרציפות של פונקציה בנקודה.

ב. (12 נק') בדקו האם הפונקציה הנתונה $f(x)$ גזירה בנקודה $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin^2(\pi x) & x<1\\ (x-1)\sin^2(\pi x) & x\geq 1\end{cases}$$

שאלה 5 (16 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$$

שאלה 6ב (11 נק׳)

רשמו את שני איברים הראשונים של פולינום טיילור עם שארית בצורת לגרנג' עבור הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$ סביב לנקודה $x_0=2$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **242**

תשפ"ב · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1ב (12 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

שאלה 2ב (10 נק׳)

חשבו את אורך הגרף הפונקציה בקטע $[-2,-1]$:

$$f(x)=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$$

שאלה 3ב (12 נק׳)

הוכיחו כי לכל $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים: $\tan(x)>x$. רשמו ניסוח מדויק של המשפט המתאים.

שאלה 4 (17 נק׳)

(יש קשר בין הסעיפים)

א. (5 נק') רשמו את הגדרת הרציפות של פונקציה בנקודה.

ב. (12 נק') בדקו האם קיים ערך הפרמטר C כך שהפונקציה הנתונה $f(x)$ רציפה בנקודה π:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\arcsin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\right)}{x-\pi} & x\neq\pi\\ C & x=\pi\end{cases}$$

שאלה 5 (16 נק׳)

(יש קשר בין הסעיפים)

א. רשמו את הגדרת הנגזרת של פונקציה בנקודה.

ב. בדקו האם קיים ערך הפרמטר A כך שהפונקציה $g(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{e^x-1} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$$

אם הפונקציה גזירה חשבו את הנגזרת, אחרת תסבירו למה הפונקציה לא גזירה בנקודה אפס.

שאלה 6ב (11 נק׳)

קבעו לאילו ערכי הפרמטר k האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_1^{\infty}x^{k-\arctan(x)}\,dx$$

מתכנס. אם קיימים ערכי הפרמטר עבורם האינטגרל מתכנס, חשבו את ערך האינטגרל.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **244**

תשפ״ב · סמסטר א׳ · מועד מיוחד

שאלה 1 (20 נק׳)

מצאו מהו פולינום טיילור מסדר 2 סביב $a = 0$ של הפונקציה

$$f(x) = \ln\left(1 + \tan(x)\right).$$

א. x

ב. $x - \frac{x^2}{2}$

ג. $1 + x$

ד. $1 + x - \frac{x^2}{2}$

שאלה 2א (10 נק׳)

נסמן:

$$I = \int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx.$$

אילו מבין הטענות הבאות נכונות? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln(t)}dt$.

ב. $I = \int_e^{e^2} \frac{t}{\ln(t)}dt$.

ג. $\frac{e^2-e}{2} \le I \le e^2 - e$

ד. $I < \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{t}{\ln(t)}dt$.

שאלה 2ב (10 נק׳)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ונגדיר: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. אילו מבין הטענות הבאות נכונות בהכרח? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. $F'(0) = 0$.

ב. F רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$.

ג. F פונקציה אי־זוגית.

ד. יש ל־F נקודת קיצון גלובלית ב־$\mathbb{R}$.

שאלה 3 (20 נק׳)

תהי

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right).$$

אילו מהטענות הבאות נכונות: (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים וסופי.

ב. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

ג. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

ד. הגבול $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ לא קיים.

שאלה 4א (10 נק׳)

צורתו של מיכל הדלק בספינת החלל היא כדור מושלם ברדיוס 4 מטר. המיכל מלא בדלק עד לגובה של 3 מטר מקרקעית המיכל. חשבו את נפח הדלק במיכל.

שאלה 4ב (10 נק׳)

חשבו את התמונה של הפונקציה $f : [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-x}(x+3)^2.$$

שאלה 5ב (10 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right).$$

הצעה: הוכיחו את אי־השוויון הבא: לכל $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln(k) \le \frac{1}{k}.$$

ולכן לכל $k > 1$

$$\ln(k+1) - \ln(k) \le \frac{1}{k} \le \ln(k) - \ln(k-1).$$

(מי שיחשב את הגבול תוך שימוש באי־שיוון ללא הוכחה או יוכיח את אי־השיוון באופן נכון בלי לחשב את הגבול יקבל ניקוד חלקי)

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **247**

תשפ״ב · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (20 נק׳)

על ידי כך שתחשבו את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx$$

או בכל דרך אחרת, קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות: (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. $\int_{-3}^{-1} \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{8}(-\ln(16)-\pi)$

ב. $\int_{1}^{2} \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{8}(\ln(16)-2\pi)$

ג. $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{16}(\ln(16)-2\pi)$

ד. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{8}(\ln(16)-\pi)$

שאלה 2א (10 נק׳)

תהי

$$f(x) = 5 + \frac{\sin(2x)}{x^2-x}.$$

אילו מבין הטענות הבאות נכונות? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. $x=0$ היא אסימפטוטה אנכית של f.

ב. $x=1$ היא אסימפטוטה אנכית של f.

ג. $y=0$ היא אסימפטוטה אופקית של f.

ד. $y=5$ היא אסימפטוטה אופקית של f.

שאלה 2ב (10 נק׳)

יהיו $a<b$ מספרים ממשיים. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים וקמורה כלפי מעלה, ותהי $g(x)=(f(x))^2$. אילו מבין הטענות הבאות נכונות בהכרח? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. לפחות אחת הנקודות מהנקודות a ו־b היא נקודת מינימום עבור g בקטע $[a,b]$.

ב. לפחות אחת הנקודות מהנקודות a ו־b היא נקודת מקסימום עבור g בקטע $[a,b]$.

ג. אם $f(x)\geq 0$ אז הפונקציה g קמורה כלפי מעלה.

ד. אם $f(x)\leq 0$ אז לפחות אחת הנקודות מהנקודות a ו־b היא נקודת מקסימום עבור g בקטע $[a,b]$.

שאלה זו עוסקת בקמירות, קעירות ונקודות פיתול, נושאים שאינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 3 (20 נק׳)

תהי f פונקציה המוגדרת כך:

$$f(x)=\begin{cases}(\cos(x)-1)\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

אילו מהטענות הבאות נכונות: (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. הגבול $\lim_{x\to 0} f'(x)$ קיים וסופי.

ב. $f'(0)=0$.

ג. הנגזרת של f רציפה בכל תחום הגדרתה.

ד. f גזירה בכל נקודות הרציפות שלה.

שאלה 4א (10 נק׳)

אנו רוצים לתכנן גינה מלבנית בעלת שטח 1 מ\"ר. על כל אחת מהצלעות של הגינה יש להתקין קטע חומה מבטון בצורת ריבוע מושלם, כלומר גובה החומה בכיוון הצלע שווה לאורך הצלע. מצאו מהן המידות של הגינה כך ש**כמות הבטון הנדרשת להתקנת החומה** תהיה מינימלית. כלומר: מצאו מהן מידות הגינה עבורן **שטח החומה** יהיה מינימלי.

שאלה 4ב (10 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n^2}\cos\left(\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\frac{n}{n^2}\cos\left(\frac{n^2}{n^2}\right)\right)$$

שאלה 5ב (10 נק׳)

מצאו את כל הערכים של $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^\infty x^a e^{bx}\,dx$ מתכנס. הוכיחו את תשובתכם.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **250**

תשפ״ב · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (20 נק׳)

תהי

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)+\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

על ידי כך שתחשבו את הנגזרת f', קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות: (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. $f'(0)=\frac{1}{2}$

ב. $f'(\frac{1}{2})=0$

ג. $f'(1)=\frac{2}{7}$

ד. $f'(2)=\frac{2}{7}$

שאלה 2א (10 נק׳)

תהי

$$f(x)=\cos^3(x)+3\sin^2(x).$$

אילו מבין הטענות הבאות נכונות? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

הערה: פולינום מקלורן = פולינום טיילור־מקלורן (סביב $a=0$).

א. פולינום מקלורן מסדר $n=2$ של f הוא $P(x)=1+\frac{3}{2}x^2$.

ב. פולינום מקלורן מסדר $n=3$ של f הוא $P(x)=1+\frac{3}{2}x^2$.

ג. פולינום מקלורן מסדר $n=2$ של f הוא $P(x)=1-\frac{3}{2}x^2$.

ד. פולינום מקלורן מסדר $n=3$ של f הוא $P(x)=1-\frac{3}{2}x^2$.

שאלה 2ב (10 נק׳)

תהי

$$f(x)=\cos^3(x)+3\sin^2(x).$$

על סמך נוסחת השארית של לגרנז' לפולינום טיילור–מקלורן מסדר 1 של f, נוכל בודאות להסיק ש: (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

א. $0.895\le f(\frac{1}{10})\le 1.105$

ב. $0.94\le f(\frac{1}{10})\le 1.06$

ג. $1.06\le f(\frac{1}{10})\le 1.16$

ד. $f(\frac{1}{10})=1.06$

שאלה 3 (20 נק׳)

חשבו את אורך הגרף של הפונקציה

$$f(x)=\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2}$$

בקטע $[1,3]$.

א. $\frac{44}{3}$

ב. $\frac{45}{3}$

ג. $\frac{46}{3}$

ד. $\frac{47}{3}$

שאלה 4א (10 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

שאלה 4ב (10 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x}\right)$$

שאלה 5ב (10 נק׳)

עבור אילו ערכים של המספר הממשי a יש למשוואה

$$x^4-ax+a=0$$

בדיוק פיתרון אחד בקטע $[0,1]$? הוכיחו את תשובתכם.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **253**

תשפ"א · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

שאלה 1א (18 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}, & x<0\\ a, & x=0\\ x^2\cos\left(\frac{4}{3x}\right)+\frac{x}{b}, & x>0\end{cases}$$

בדקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b:

1) הפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה לכל x ממשי.

2) הפונקציה $f(x)$ תהיה גזירה לכל x ממשי.

שאלה 1ב (7 נק׳)

הראו כי למשוואה $x^3-3x-a=0$ יש פתרון יחיד בקטע $[0,1]$ עבור $-2\le a\le 0$.

שאלה 2א(1) (8 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}.$$

שאלה 2א(2) (8 נק׳)

הוכיחו תוך שימוש בהגדרת הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^3+2}=0.$$

שאלה 2ב (9 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, & x>1\\ ax^2+b, & x\le 1\end{cases}$$

מצאו את a ו־b אם נתון שהפונקציה $f(x)$ גזירה ב־$x=1$ וחשבו את $f'(1)$.

שאלה 3א (18 נק׳)

חשבו את הגבולות הבאים (תשתמשו בנוסחת טיילור או בכל דרך אחרת):

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}$

שאלה 3ב (7 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx.$$

שאלה 4א (7 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x \sqrt{4+e^{-t}}\,dt.$$

שאלה 4ב (18 נק׳)

חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1) $\int \frac{x^2}{e^{2x}}\,dx$

(2) $\int x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **256**

תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1א(1) (8 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}.$$

שאלה 1א(2) (8 נק׳)

הוכיחו תוך שימוש בהגדרת הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0.$$

שאלה 1ב (9 נק׳)

הוכיחו כי אם פונקציה $f(x)$ רציפה ב־$[a,\infty)$ והגבול $\lim_{x\to\infty}f(x)$ קיים וסופי, אזי $f(x)$ חסומה ב־$[a,\infty)$.

שאלה 2א (10 נק׳)

חקרו את ההתכנסות של האינטגרל. אם הוא מתכנס, חשבו אותו.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}$$

שאלה 2ב (15 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

בדקו את הרציפות והגזירות של הפונקציה בנקודה $x=0$.

שאלה 3א (16 נק׳)

חשבו את הגבולות הבאים:

(1) $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\arctan(2x)}-1}{e^{4x}-1}$

שאלה 3ב (9 נק׳)

מצאו את שטח התחום החסום על ידי הציקלואידה $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ וציר ה־x.

שאלה 4א (7 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_0^{x-1}\left(e^t-1-t\right)^2dt}{(x-1)^5}.$$

שאלה 4ב (18 נק׳)

חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1) $\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$

(2) $\int_{-1}^{2} \frac{|x-1|}{1+|x|}\, dx$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **260**

תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1א (15 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{a}{x}}, & x<0\\ e^{2}, & x=0\\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{b}{x}}, & x>0\end{cases}$$

בדקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b הפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה בנקודה $x=0$.

שאלה 1ב (10 נק׳)

תהיינה $f(x),\ g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$. הוכיחו כי אם $g(a)<f(a)$ ו־$g(b)>f(b)$ אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש־$g(c)=f(c)$.

שאלה 2א (16 נק׳)

חשבו את הגבולות הבאים:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!}{(n^{2}+1)^{n}\cdot e^{n}}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^{2}}\,\sin(n!)}{n+1}$

שאלה 2ב (9 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^{3}x}{\sqrt{x^{7}+x^{6}}}\,dx.$$

שאלה 3א (18 נק׳)

חשבו את הגבולות הבאים:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^{2}-x\cos x-2}}{x+1+\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^{2}/2}}{x^{4}}$

שאלה 3ב (7 נק׳)

מצאו את הקבועים a,b שעבורם מתקיים

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2}+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

שאלה 4א (7 נק׳)

הוכיחו כי עבור $x>1$ מתקיים האי־שוויון $(x+1)\ln(x)>2(x-1)$.

שאלה 4ב (18 נק׳)

חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **265**

תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד ג׳

שאלה 1

חשבו את הגבול של הסדרה:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2 + 8n} - \sqrt{4n^2 - 8n} \right).$$

אם אתם חושבים שהגבול לא קיים (אפילו לא במובן הרחב) סמנו "הגבול אינו קיים".

א. ∞

ב. 0

ג. 10

ד. 6

ה. 13

ו. 2

ז. 9

ח. 4

ט. הגבול אינו קיים

שאלה 2

נתונה פונקציה חיובית גזירה $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ שמקיימת את התנאים הבאים:

$$f(0) = 2, \qquad f'(0) = 8.$$

חשבו את ערך הנגזרת $h'(0)$ כאשר $h(x)$ מוגדרת על ידי הנוסחה $h(x) = f(x)^{f(x)}$.

א. $\frac{2}{25}$

ב. $32\ln(8)$

ג. $256(\ln(2)+1)$

ד. $32(\ln(2)+1)$

ה. 8

ו. $e^{16}\ln(8)$

ז. $e^{8}(\ln(2)+1)$

שאלה 3

נתון שהפונקציה $f(x)$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

$$f(-5)=2, \qquad f'(x)=4|x| \ \ \forall x.$$

מהו הערך של הפונקציה בנקודה 3? אם אתם חושבים שאין פונקציה כזו בחרו "אין פונקציה כזו".

א. 77

ב. 70

ג. 60

ד. 75

ה. 62

ו. 79

ז. אין פונקציה כזו

שאלה 4

נסמן $a=10$ ונגדיר פונקציה:

$$f(x)=(x-a)\,|x-a|.$$

סמנו את **כל המשפטים** הנכונים עבור הפונקציה (תיתכנה כמה תשובות נכונות; כל תשובה נכונה מזכה בנקודות, כל תשובה שגויה מורידה נקודות):

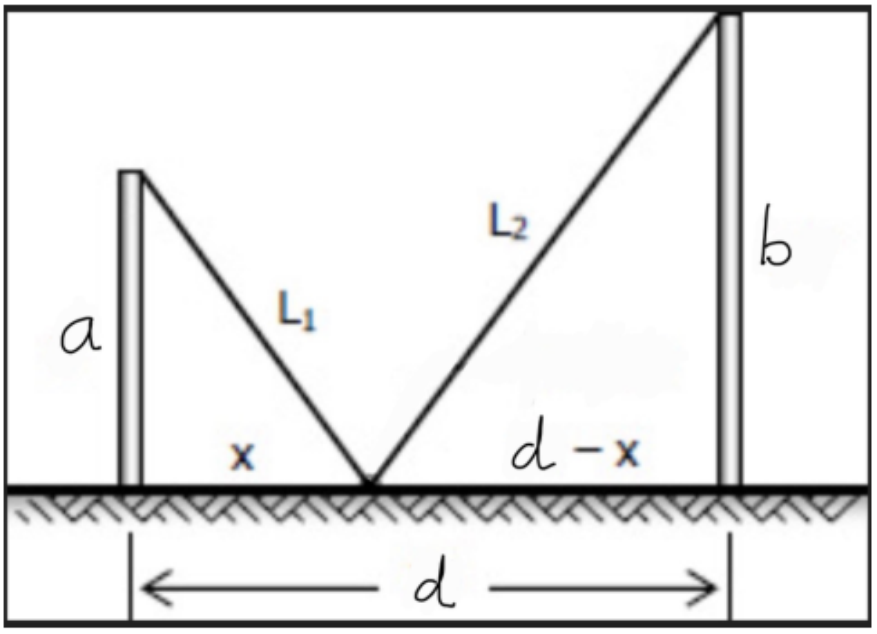
- לפונקציה יש אסימפטוטה אפקית (אולי משופעת) במינוס אינסוף
- הפונקציה גזירה ב־10 ולנגזרת יש אי רציפות סליקה בנקודה הזו
- הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה 10
- לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה 10
- הפונקציה רציפה ב־10 אך אינה גזירה שם.
- הפונקציה גזירה ב־10 ולנגזרת יש אי רציפות מסוג קפיצה בנקודה הזו
- הפונקציה גזירה ב־10 ולנגזרת יש אי רציפות עיקרית בנקודה הזו

הטענה על נקודת פיתול עוסקת בנושא שאינו נכלל בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 5

שני מוטות בגבהים של $a = 4,\ b = 5$ תקועים על קרקע שטוחה במרחק של $d = 36$ מטר זה מזה. על הקרקע תקוע יתד במרחק x מן המוט המסומן a. תייל מתוח מראש המוט האחד, אל היתד ומשם לראש המוט השני. מצאו את המרחק x במטרים שיבטיח אורך תייל מינימלי.

(שימו לב: התמונה היא להמחשה בלבד — האורכים בציור אינם בקנה מידה לנתוני השאלה בפועל.)



א. 17

ב. 23

ג. 12

ד. 11

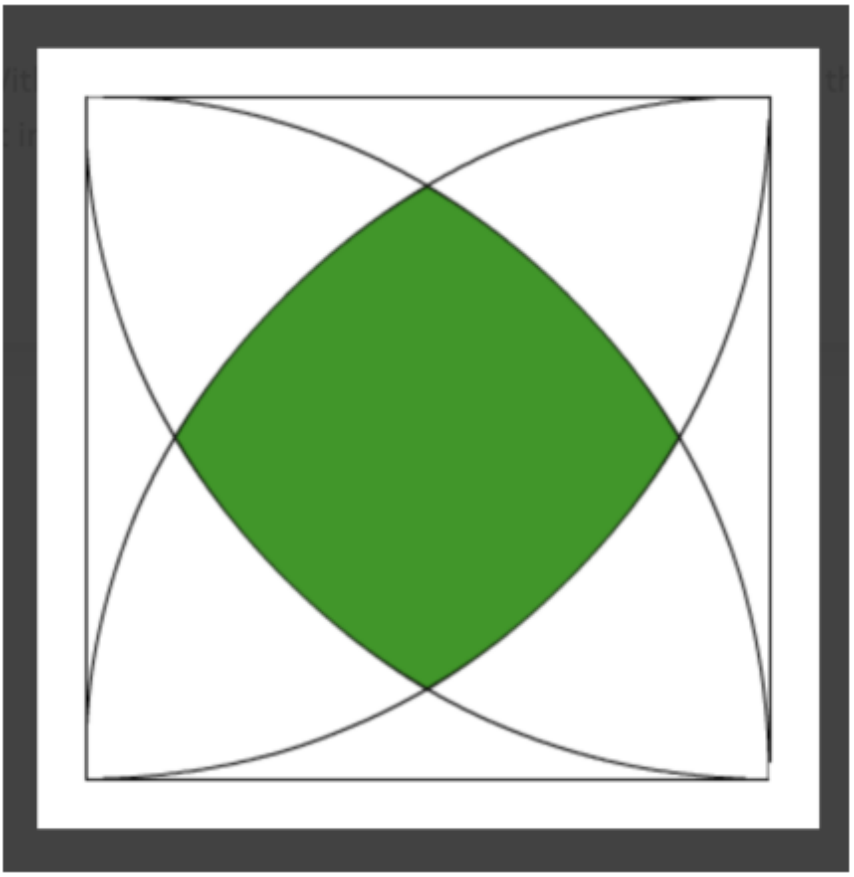
ה. 13

ו. 16

ז. 15

שאלה 6

בריבוע שאורך הצלע שלו הוא 1 מסמנים רבע מעגל שהקדקד שלו באחת הפינות של הריבוע והרדיוס שלו שווה לאורך הצלע. באופן דומה מסמנים ארבעה רבעי מעגל אחד סביב כל פינה של הריבוע, כך שמתקבלת הצורה שמופיעה באיור. מצאו את השטח A המשותף לכל רבעי העיגול הללו, כלומר את השטח המסומן בירוק בתמונה. במידת הצורך תוכלו להשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ לצורך חישוב האינטגרל.



א. $2\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1\right)$

ב. $1-\frac{\pi}{4}$

ג. $-\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}+4$

ד. $1-\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

ה. $1-\frac{\pi}{6}$

ו. $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$

ז. $\frac{4\pi}{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}+4$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **268**

תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1

חשבו את הגבול:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{120}{x \sin(5x)} - \frac{24}{x^2} \right).$$

א. 56

ב. 152

ג. 176

ד. 100

ה. 0

ו. 113

ז. הגבול אינו קיים

שאלה 2

נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על ידי הנוסחה

$$f(x) = e^{-x} \cdot (\cos(3x) + 2).$$

לגבי כל אחד מן המשפטים הבאים סמנו אם הוא נכון או לא נכון.

א. הגבול $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ קיים (כמספר ממשי, לא גבול במובן הרחב).

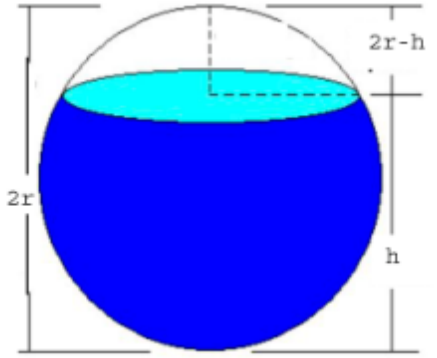
ב. הפונקציה הנתונה מקבלת מקסימום גלובלי.

ג. הפונקציה הנתונה מקבלת מינימום גלובלי.

שאלה 3

מיכל של מגדל מים מעוצב בצורת כדור בעל רדיוס $r = 4$ מטר. המיכל מלא עד לגובה של $h = 5$ מטר מקרקעיתו של הכדור. מהו נפח המים שבתוך המיכל במטר מעוקב?

(שימו לב: התמונה להמחשה בלבד, ואינה בהכרח מייצגת את הנתונים האמיתיים של השאלה.)



א. 55π

ב. $\frac{172\pi}{3}$

ג. $\frac{170\pi}{3}$

ד. 61π

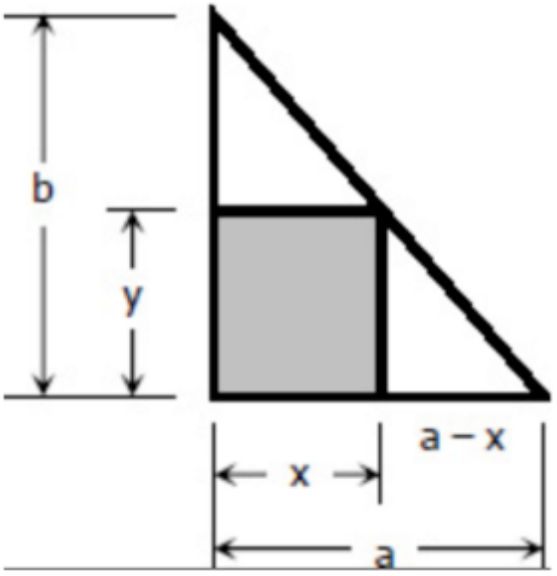
ה. $\frac{175\pi}{3}$

ו. $\frac{178\pi}{3}$

ז. $\frac{181\pi}{3}$

שאלה 4

נתון משולש ישר זווית בעל ניצבים באורך $a = 7,\ b = 16$. מהו השטח הגדול ביותר של מלבן שניתן לחסום בתוך המשולש בהנחה ששתיים מצלעות המלבן יושבות על הניצבים של המשולש, כמו באיור?
(שימו לב: התמונה להמחשה בלבד ואינה בהכרח מתאימה לנתונים האמיתיים של השאלה.)



א. 24

ב. 38

ג. 30

ד. 20

ה. 32

ו. 18

ז. 28

שאלה 5

נציב $a = 10$ ונגדיר פונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(1 + \frac{|x|}{x}\right) + \frac{2a}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

סמנו את **כל המשפטים** הנכונים עבור הפונקציה (כל תשובה נכונה מוסיפה נקודות, כל תשובה שגויה גורעת נקודות):

- לפונקציה יש אי רציפות מסוג "קפיצה" באפס.
- לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית באפס.
- אסימפטוטה אפקית באינסוף קיימת ונתונה על ידי הישר $y = 30$.
- לפונקציה יש אסימפטוטה אפקית במינוס אינסוף.
- לפונקציה יש אי רציפות עיקרית באפס.
- הפונקציה רציפה באפס.
- הפונקציה בעלת אי רציפות סליקה באפס.

שאלה 6

חשבו את אורך הגרף של הפונקציה $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ מעל הקטע $[4,9]$.

א. $\ln\left(\frac{15}{11}\right)+6$

ב. $\ln\left(\frac{7}{6}\right)+5$

ג. $\ln\left(\frac{4}{3}\right)+5$

ד. $\ln\left(\frac{25}{18}\right)+7$

ה. $\ln\left(\frac{63}{55}\right)+4$

ו. 8

ז. $\ln\left(\frac{27}{22}\right)+5$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **270**

תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1

נגדיר סדרה באופן רקורסיבי כך:

$$a_1 = \sqrt{110}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{110 + a_n}.$$

סמנו את **כל המשפטים** שבהכרח נכונים מבין המשפטים הבאים (תיתכן יותר מתשובה נכונה אחת; על סימון של תשובות שגויות יורדות נקודות):

- הסדרה מונוטונית יורדת
- הסדרה מתכנסת ל־11
- הסדרה אינה מתכנסת
- הסדרה אינה מונוטונית
- הסדרה מתכנסת ל־110
- הסדרה מתכנסת במובן הרחב, לאינסוף
- הסדרה מתכנסת ל־10
- הסדרה מונוטונית עולה

שאלה 2

לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $c \in [2, 12]$ שעבורה מתקיימת המשוואה

$$\frac{\ln(12) - \ln(2)}{12 - 2} = \ln'(c).$$

במקרה הזה נתון לנו שישנה בדיוק נקודה אחת כזו שנמשיך לסמן אותה c. תהא $L(x)$ משוואת הישר המשיק לגרף של הפונקציה $f(x) = \ln(x)$ מעל הנקודה c. חשבו את הערך $L(0)$.

א. $-\ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right) - 1$

ב. $1 - \ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right)$

ג. $\frac{\ln 6}{10} - \ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right)$

ד. $-\ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right)$

ה. $-\ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right) - 3$

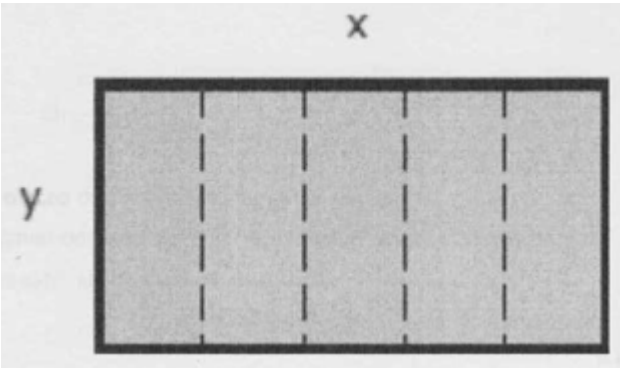
ו. $-\ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right) + \frac{\ln 6}{10} - 3$

ז. $-\ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right) + \frac{\ln 6}{10} + 1$

שאלה 3

יש לגדר מגרש מלבני בעל שטח של 300 מטר רבוע, באופן שהגדר **גם** מקיפה את המגרש סביב סביב **וגם** מחלקת אותו ל־8 תת־חלקות. החלוקה לתת־חלקות מתבצעת על ידי 7 גדרות מקבילות. מצאו את היחס $\frac{x}{y}$ בין הצלע הארוכה והקצרה של המלבן שיבטיח אורך גדר מינימלי.

(שימו לב: השרטוט ממחיש מקרה אחד ספציפי שלא בהכרח תואם את תנאי השאלה, המקרה של חמש תת־חלקות הנוצרות על ידי ארבע גדרות.)



א. 12

ב. $\frac{23}{2}$

ג. $\frac{17}{2}$

ד. 5

ה. $\frac{9}{2}$

ו. $\frac{5}{2}$

ז. $\frac{19}{2}$

שאלה 4

חשבו את האינטגרל הלא אמיתי

$$I = \int_{10}^{\infty} \frac{3}{x^2 - 9x + 18}\, dx.$$

במידה ואתם חושבים שהאינטגרל לא מתכנס סמנו את המשפט "האינטגרל אינו מתכנס".

א. 11

ב. $\ln\left(\frac{4}{7}\right)$

ג. $-\ln\left(\frac{4}{7}\right)$

ד. $\frac{3}{10}$

ה. 10

ו. $3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{11}{3 \cdot 2^{3/2}}\right)\right)$

ז. האינטגרל אינו מתכנס

שאלה 5

חשבו את פולינום מקלורן (טיילור סביב אפס) $P(x)$ מסדר 2 עבור הפונקציה הבאה:

$$F(x)=\int_{-10}^{x}\frac{t}{(t+10)^2+1}\,dt.$$

א. $\frac{x^2}{202}+100$

ב. $\frac{x^2}{202}+\frac{\ln(101)}{2}-10\tan^{-1}(10)$

ג. $-5x^2-9x-8$

ד. $\frac{x^2}{202}+\frac{\ln(101)}{2}$

ה. $\frac{x^2}{202}-10x+\frac{\ln(101)}{2}-10\tan^{-1}(10)$

ו. $-10x^2-9x-100$

ז. $\frac{x^2}{202}+x+1$

שאלה 6

מצאו את אורך העקומה שיוצר הגרף של הפונקציה $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, מעל הקטע $\left[0,\frac{5}{9}\right]$.

א. $\frac{25}{81}$

ב. $\frac{25}{324}$

ג. $\frac{19}{27}$

ד. $\frac{5}{4}$

ה. $3\sinh^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{20\sqrt{61}}{27}$

ו. $\frac{5\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{9}$

ז. $\frac{5}{27}$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **272**

תש"פ · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

שאלה 1א (10 נק׳)

רשמו את הגדרת גבול הסדרה. הוכח את השוויון הבא תוך שימוש ישיר בהגדרת הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0$$

שאלה 1ב (7 נק׳)

חשב את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

שאלה 2ג (10 נק׳)

חשבו את גבול הפונקציה

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-8)^{\frac{1}{x^2-2x-15}}$$

שאלה 3ב (10 נק׳)

בדקו האם קיימים ערכי הפרמטרים כך שהפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$? אם כן, חשבו את ערכי הפרמטרים a,b. אם לא, תסבירו מדוע.

$$f(x)=\begin{cases}\left(1+a^2x-9x\right)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b, & x=0\\ 1+x^{-\frac{a}{x}}, & x>0\end{cases}$$

שאלה 4 (16 נק׳)

בדקו האם הפונקציה גזירה בנקודה $x=1$:

$$g(x)=\begin{cases}3, & x<1\\ 2x^4-4x+1, & x\geq 1\end{cases}$$

שאלה 5ב (10 נק׳)

חשבו את שטח התחום המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=x+e^{-x}$, האסימפטוטה לגרף של הפונקציה $f(x)$ ב־$+\infty$ והישר $x=-3$.

שאלה 6 (17 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **275**

תש"פ · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1ב (10 נק׳)

בדקו האם הסדרה הנתונה מתכנסת

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$$

שאלה 2ג (10 נק׳)

חשבו את גבול הפונקציה

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\cos x \, (\sin x)^2}$$

שאלה 3ב (12 נק׳)

רשמו את הגדרת הרציפות של פונקציה בנקודה. בדקו האם הפונקציה הנתונה $f(x)$ רציפה על כל הישר

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$$

שאלה 4 (16 נק׳)

רשמו את הגדרת הנגזרות של פונקציה בנקודה ובדקו האם הפונקציה $g(x)$ גזירה בנקודה $x = 2$:

$$g(x) = |x^2 - 5x + 6|$$

שאלה 5ב (10 נק׳)

קבעו האם האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

מתכנס או מתבדר. אם האינטגרל מתכנס, חשבו את ערכו.

שאלה 6 (17 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} \, dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} \, dt}$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **277**

תש"פ · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1ב (10 נק׳)

חשבו גבול של סדרה

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7+\sqrt[4]{n}}$$

שאלה 2ג (10 נק׳)

חשבו את גבול הפונקציה

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-8)^{\frac{1}{x^2-2x-15}}$$

שאלה 3ב (10 נק׳)

בדקו האם הפונקציה $f(x)$ רציפה על כל הישר

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x<0\\ ax+b, & 0<x<2\\ \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}, & x>2\end{cases}$$

שאלה 4 (16 נק׳)

בדקו האם הפונקציה גזירה בנקודה $x=1$:

$$F(x)=\begin{cases}3, & x<1\\ 2x^4-4x+1, & x\geq 1\end{cases}$$

שאלה 5ב (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{x\cos x}{(\sin x)^3}\,dx$$

שאלה 6 (17 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **279**

תש"פ · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (20 נק׳)

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\arcsin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\right)}{x-\pi}.$$

א. $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\right)^2}}$

ב. $\left(\frac{2\pi}{(1+\pi^2)^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\right)^2}}$

ג. הגבול לא קיים.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 2א (10 נק׳)

נתון ש־$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה המקיימת $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$. אילו מבין הטענות הבאות נכונות? **(ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)**

(א) בהכרח קיים מספר טבעי N כך שלכל $x>N$ מתקיים $f(x)\geq 3$.

(ב) בהכרח קיים מספר טבעי N כך שלכל $x>N$ מתקיים $f(x+1)<f(x)+1$.

(ג) בהכרח $\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{e^n}{n^2}\right)=3$.

(ד) בהכרח $\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{n^2}{e^n}\right)=3$.

שאלה 2ב (10 נק׳)

מספר הפתרונות של המשוואה $e^{x^2}+x^2-2=0$ הוא:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. יותר מ־2.

שאלה 3 (20 נק׳)

מהו נפח גוף הסיבוב המתקבל על ידי סיבוב התחום

$$4\leq x\leq 5,\quad 0\leq y\leq\sqrt{\frac{2x+12}{x^2-9}}$$

סביב ציר X:

א. $\pi\sqrt{5}$

ב. $\pi\sqrt{3}$

ג. $\pi\ln 7$

ד. $\pi\ln(8)$

שאלה 4א (14 נק׳)

כזכור, המרחק בין נקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) במישור הוא $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.
מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $y = \frac{1}{6}x^2$ שמרחקן מהנקודה $(0, 4)$ הוא מינימלי.

שאלה 4ב (6 נק׳)

כזכור, המרחק בין נקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) במישור הוא $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.
האם קיימות נקודות על הגרף של הפונקציה $y = \frac{1}{6}x^2$ שמרחקן מהנקודה $(0, 4)$ הוא מקסימלי? נמקו.

שאלה 5ב (10 נק׳)

לאילו ערכי α האינטגרל הלא־אמיתי

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha - \arctan(x)}\, dx$$

מתכנס? הוכיחו את תשובתכם.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **282**

תש"פ · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (20 נק׳)

נגדיר: $f(x) = x^{\cos(x)}$. משוואת הישר המשיק לפונקציה f בנקודה π היא:

א. $y = -\pi^{-2}(x-\pi) + \pi^{-1}$

ב. $y = (\cos(\pi) - 1)\pi(x-\pi) + \pi^{\cos(\pi)}$

ג. $y = \ln(\pi)\pi^{-1}(1+\sin(\pi))\pi(x-\pi) + \pi^{\cos(\pi)}$

ד. $y = \ln(\pi)\pi^{-1}(1+\sin(\pi))\pi(x-\pi) - \pi^{\cos(\pi)}$

שאלה 2א (10 נק׳)

אילו מבין הטענות הבאות נכונות? **(ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)**

(א) אם הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים וסופי אזי הפונקציה f גזירה ב־a.

(ב) אם f רציפה ב־a אזי f גזירה ב־a.

(ג) אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים וסופי אזי f גזירה ב־a.

(ד) אם f גזירה ב־a אזי $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

שאלה 2ב (10 נק׳)

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$$

סמנו אילו מהטענות הבאות נכונות. **(ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)**

(א) הפונקציה f מונוטונית עולה במובן החזק בתחום הגדרתה.

(ב) הפונקציה f מונוטונית עולה במובן החלש בתחום הגדרתה, אבל לא במובן החזק.

(ג) הפונקציה f קמורה כלפי מעלה (״מחייכת״) בתחום הגדרתה.

(ד) הפונקציה f קמורה כלפי מטה (״עצובה״) בתחום הגדרתה.

טענות ג ו־ד עוסקות בקמירות, נושא שאינו נכלל בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 3 (20 נק׳)

מהו ערכו של האינטגרל המסויים הבא:

$$\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

א. 0

ב. π

ג. 2π

ד. 4π

שאלה 4 (20 נק׳)

הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נתונה ע״י הנוסחה הבאה:

$$f(x)=\frac{1}{|x|+1}+\frac{1}{|x-2|+1}$$

א. (14 נק׳) מצאו את כל נקודות הקיצון המקומיות והגלובליות של f.

ב. (6 נק׳) ציירו סקיצה של הגרף של הפונקציה f.

שאלה 5ב (10 נק׳)

רשמו את פולינום טיילור מסדר 2 סביב $a=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ של הפונקציה

$$F(x)=\int_{\sqrt{\pi/6}}^{x}\cos\left(t^2\right)dt.$$

(אם בתשובה מופיעים קבועים כגון π, e או $\sqrt{2}$ מומלץ לרשום אותם בצורה זו ולא לרשום קירוב עשרוני)

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **284**

תשע"ט · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1א (10 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

שאלה 1ב (10 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 7}\left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{x-7}}$$

שאלה 2א (10 נק׳)

מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$ בנקודה $x=\pi$.

שאלה 2ב (10 נק׳)

הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

שאלה 3 (20 נק׳)

נתונה $f(x)=\frac{x^3}{(x+2)^2}$. חקרו אותה לפי השלבים הבאים: מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות, מצאו נקודות קיצון, מצאו נקודות פיתול וציירו סקיצה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 4א (10 נק׳)

חשבו:

$$\int\frac{4x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

שאלה 4ב (10 נק׳)

חשבו:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}(\ln(k+n)-\ln n)\right)$$

שאלה 5 (20 נק׳)

קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס או לא. נמקו היטב את תשובתכם.

$$\int_2^\infty\frac{x\cos x}{\sqrt{x^6+x^5+3}+7x}\,dx$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **287**

תשע״ט · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1א (10 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\sin x - x(1+x)}{x^{3}}$$

שאלה 1ב (10 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^{2}+x}-\sqrt{x^{2}-x}\right)$$

שאלה 2ב (15 נק׳)

נתונה המשוואה $e^{-2x}+4x-10=0$. הוכיחו כי למשוואה זו יש בדיוק שני פתרונות ממשיים.

שאלה 3 (20 נק׳)

נתונה $f(x)=\frac{e^{x}}{1+x}$. חקרו אותה לפי השלבים הבאים: מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות, מצאו נקודות קיצון, מצאו נקודות פיתול וציירו סקיצה.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי״.

שאלה 4א (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{5x^{2}+3x+4}{(x+1)(x^{2}-1)}\,dx$$

שאלה 4ב (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_{0}^{\sqrt{2}} x^{5}e^{x^{2}}\,dx$$

שאלה 5 (20 נק׳)

קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס או לא. נמקו היטב את תשובתכם.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{2x^{2}+\cos x}{\sqrt{x^{6}+3x^{2}+5}+2x}\,dx$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד 290

תשע״ט · סמסטר א׳ · מועד מיוחד

שאלה 2 (15 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\frac{1}{|x-1|}+\frac{1}{|x+1|}.$$

מצאו תחומי עליה וירידה של הפונקציה.

שאלה 3 (15 נק׳)

הוכיחו כי לכל $a>0$ ולכל $x>0$ מתקיים

$$ae^{-ax}<\frac{1-e^{-ax}}{x}<a.$$

שאלה 4 (15 נק׳)

השתמשו בפולינום טיילור כדי לחשב את $\sqrt{3.9}$ עם שגיאה שקטנה בערך מוחלט מ־$\frac{1}{10^4}$ (הדרכה: השתמשו בהערכות $3<3.9$ ו־$\sqrt{3.9}>1.5$).

שאלה 5 (15 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{10}{(x^2+9)(x-1)}\,dx.$$

שאלה 6 (15 נק׳)

הראו כי הפונקציה

$$f(x)=\frac{1}{x}-6e^{-x}$$

מקבלת את הערך -0.5 לפחות פעמיים בקטע $(0,\infty)$ (רמז: חשבו את ערך הפונקציה ב־1).

שאלה 7 (7 נק׳)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\left(e^x-x\right)-1}{x^3}=$$

א. $1/4$

ב. $1/6$

ג. $1/3$

ד. 4

ה. אף תשובה לא נכונה

שאלה 8 (7 נק׳)

הנפח של הגוף המתקבל מסיבוב של הגרף של $y = xe^x$ סביב ציר ה־x בין 0 ל־1 הוא

א. $\frac{e^2-1}{4}$

ב. $\frac{e^2+1}{4}$

ג. $\pi\frac{e^2-1}{4}$

ד. $\pi\frac{e^2+3}{4}$

ה. אף תשובה לא נכונה

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **292**

תשע״ט · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 2 (15 נק׳)

מצאו תחומי קמירות מעלה (קמירות) וקמירות מטה (קעירות) ואסימפטוטות משופעות באינסוף ובמינוס אינסוף לפונקציה

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}.$$

שאלה זו עוסקת בקמירות, קעירות ונקודות פיתול, נושאים שאינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 3 (15 נק׳)

הוכיחו באמצעות משפט ערך הביניים של לגרנז׳ כי לכל $x>0$ מתקיים

$$\frac{x}{2\sqrt{1+x}}>\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}>\frac{x}{2\sqrt{1+2x}}.$$

שאלה 4 (15 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\,e^{\frac{k}{n}}.$$

שאלה 5 (15 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{5}{(x^2+4)(x-1)}\,dx.$$

שאלה 6 (15 נק׳)

נגדיר את הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ על ידי

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{9}{6-a_n}.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

שאלה 7 (7 נק׳)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-x^2/2}}{x^4}=$$

א. $1/6$

ב. $-1/6$

ג. $-1/12$

ד. $1/12$

ה. אף תשובה לא נכונה

שאלה 8 (7 נק׳)

השטח החסום בין הקווים $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\sin(x)\cos^2(x)$ וציר ה־x מסתובב סביב ציר ה־x. נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא

א. $\frac{\pi}{32}$

ב. $\frac{\pi^2}{32}$

ג. $\frac{\pi^2}{16}$

ד. $\frac{\pi}{16}$

ה. אף תשובה לא נכונה

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **296**

תשע"ט · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 2 (15 נק׳)

מצאו את הנקודות בהן יש לפונקציה $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}$ מקסימום מקומי ואת הנקודות בהן יש לה מינימום מקומי.

שאלה 3 (15 נק׳)

הוכיחו באמצעות משפט ערך הביניים של לגרנז׳ כי לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $\tan(x)>x$.

שאלה 4 (15 נק׳)

חשבו את $\cos(0.5)$ על ידי פולינום מקלורן של $\cos(x)$ כך שהשגיאה תהיה קטנה מ־$\frac{1}{100}$.

שאלה 5 (15 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx.$$

שאלה 6א (5 נק׳)

מצאו סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את התנאים המתאימים או הראו שזה בלתי אפשרי. במידה והגבולות אינם מיידיים עליכם לנמק.

$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

שאלה 6ב (5 נק׳)

מצאו סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את התנאים המתאימים או הראו שזה בלתי אפשרי. במידה והגבולות אינם מיידיים עליכם לנמק.

$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ ו־$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

שאלה 6ג (5 נק׳)

מצאו סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את התנאים המתאימים או הראו שזה בלתי אפשרי. במידה והגבולות אינם מיידיים עליכם לנמק.

$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ והגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ לא קיים.

שאלה 7 (7 נק׳)

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}=$$

א. $e^{-1/3}$

ב. $e^{-1/2}$

ג. e^{-2}

ד. $e^{1/2}$

ה. אף תשובה לא נכונה

שאלה 8 (7 נק׳)

השטח החסום בין הקווים $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=e^{2x}\cos(x)$ וציר ה־x הוא

א. $\frac{2-e^{\pi}}{5}$

ב. $\frac{e^{\pi}+2}{5}$

ג. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$

ד. $\frac{2-e^{\pi}}{3}$

ה. אף תשובה לא נכונה

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **299**

תשע״ח · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

שאלה 1א1

חשבו את הגבול (תשתמשו בנוסחת טיילור או בכל דרך אחרת):

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}$$

שאלה 1א2

חשבו את הגבול (תשתמשו בנוסחת טיילור או בכל דרך אחרת):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}$$

שאלה 1ב (7 נק׳)

חשבו את $(1.04)^{1.5}$ עם דיוק 0.01.

שאלה 2א (13 נק׳)

בעזרת משפט רול הוכיחו כי למשוואה $x\sqrt{x}=e^{-x}$ קיים פתרון יחיד בתחום $[0,\infty)$.

שאלה 2ב (12 נק׳)

קבעו לאילו ערכים של m האינטגרל

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^m\cdot\sin x}$$

מתכנס ועבור אילו ערכים של m הוא מתבדר. (אין צורך לחשב את האינטגרל.)

שאלה 3א (15 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^3+Bx+2A+3, & x\le 0\\ \cos x+Ax+B, & x>0\end{cases}$$

בדקו לאילו ערכים של A ו־B הפונקציה

1) אינה רציפה בנקודה $x=0$,

2) רציפה בנקודה $x=0$,

3) גזירה בנקודה $x=0$.

שאלה 3ב (10 נק׳)

הוכיחו את אי השוויון הבא:

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b},$$

כאשר $0<b<a$.

שאלה 4 (25 נק׳)

חקרו את הפונקציה: $f(x) = x^2 \cdot |\ln x|$.

(גבולות חד־צדדיים בנקודות האי־רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של הגרף).

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **303**

תשע״ח · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1א1 (6 נק׳)

חשבו את הגבול (בעזרת כלל לופיטל):

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

שאלה 1א2 (6 נק׳)

חשבו את הגבול (בעזרת פולינום מקלורן):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^4}$$

שאלה 1א3 (6 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\sin x}{x}$$

שאלה 1ב (7 נק׳)

מצאו את נפח הגוף המתקבל על ידי סיבוב סביב ציר ה־x של התחום המישורי החסום על ידי $y=\tan x$, $x=\frac{\pi}{4}$ וציר ה־x.

שאלה 2א (18 נק׳)

1. הוכיחו כי למשוואה $\arctan x = ax$ קיימים בדיוק 3 פתרונות עבור $0<a<1$.

2. חקרו כמה פתרונות קיימים למשוואה עבור $a\le 0$ ועבור $a\ge 1$.

שאלה 2ב (7 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}$$

שאלה 3א (18 נק׳)

נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}(x+a)^{\frac{b}{x}}, & x<0\\ e^2, & x=0\\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{c}{x}}, & x>0\end{cases}$$

בדקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b,c (בהנחה ש־$a>0$) הפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה בנקודה $x=0$.

שאלה 3ב (7 נק׳)

חשבו את אורך העקומה: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, כאשר $0\le x\le 1$.

שאלה 4 (25 נק׳)

א. (20 נק') חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה $f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$.
(גבולות חד־צדדיים בנקודות האי־רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של הגרף).

ב. (5 נק') קבעו לאילו ערכים של m למשוואה: $f(x) = m$ קיים 1) פתרון אחד, 2) שני פתרונות?

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **306**

תשע״ח · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1א1 (6 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\right)$$

שאלה 1א2 (6 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$$

שאלה 1א3 (6 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

שאלה 1ב (7 נק׳)

חשבו את אורך העקום הנתון בהצגה פרמטרית:

$$G=\left\{x(t)=a\cos^3 t,\ y(t)=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi\right\}$$

שאלה 2א1 (4 נק׳)

הוכיחו את הטענה הבאה: אם הפונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום סופי פתוח (a,b) וקיימים גבולות **סופיים** $\lim_{x\to a^+}f(x)=A$ ו־$\lim_{x\to b^-}f(x)=B$, אז הפונקציה $f(x)$ חסומה בתחום (a,b).

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **309**

תשע"ח · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1

אנו רוצים לבנות קופסה בצורת תיבה, ללא מכסה, שבסיסה ריבוע. על הקופסה להכיל 27 מטר קוב. תחתית הקופסה עולה 6 שקלים למטר רבוע וצידי הקופסה עולים 3 שקלים למטר רבוע. מה צריך להיות אורך צלע הבסיס על מנת למזער את עלות הקופסה?

שאלה 2 (20 נק׳)

תהי

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2}$$

מצאו את התמונה של הפונקציה f בתחום ההגדרה הטבעי שלה, כלומר מצאו את כל ערכי y עבורם קיים x בתחום ההגדרה של הפונקציה כך ש־$f(x) = y$.

שאלה 3 (20 נק׳)

נתונות הפונקציות $f(x) = x^2$ ו־$g(x) = \sqrt{x}$ (ראו את השטח המקווקו בציור).

א. (10 נק') חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ושל $g(x) = \sqrt{x}$.

ב. (10 נק') חשבו את נפח הגוף שמתקבל מסיבוב השטח מהסעיף הקודם סביב ציר x.

שאלה 4

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

שאלה 5ב (10 נק׳)

מצאו את כל נקודות הקיצון המקומיות והגלובאליות של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

נמקו את תשובתכם.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **311**

תשע״ח · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (20 נק׳)

חשבו את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{x^3+2x^2-8x-9}{x^2-9}\,dx$$

שאלה 2 (20 נק׳)

תוך שימוש בפולינום טיילור או בכל דרך אחרת מצאו מספר רציונלי שההפרש בינו לבין $\sqrt{10}$ קטן בערכו המוחלט מ־$\frac{1}{100}$.
נמקו את שיקולכם (כלומר הוכיחו בקצרה את הטענות שלכם).

שאלה 3 (20 נק׳)

קבעו האם האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

מתכנס או מתבדר. אם האינטגרל מתכנס, חשבו את ערכו.

שאלה 4 (20 נק׳)

תהי

$$f(x)=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$$

חשבו את אורך הגרף של הפונקציה f מעל הקטע $[-2,-1]$.

שאלה 5ב (10 נק׳)

בהסתמך על משפט הערך הממוצע של לגראנז׳, או בכל דרך אחרת שתבחרו, הוכיחו שלכל $n\geq 1$ טבעי מתקיים

$$\frac{1}{n+1}\leq \ln(n+1)-\ln(n)\leq \frac{1}{n}.$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **312**

תשע״ז · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

שאלה 1א1 (8 נק׳)

חשבו את האינטגרל:

$$\int \frac{x^2}{e^{2x}}\,dx$$

שאלה 1א2 (8 נק׳)

חשבו את האינטגרל:

$$\int x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

שאלה 1ב (9 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot \sin(ax)}{1-\cos x}, & x<0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}, & x>0 \end{cases}$$

מצאו ערכים של a ו־b עבורם הפונקציה רציפה בנקודה $x=0$.

שאלה 2א (10 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1 \\ ax^{2}+b, & x\le 1 \end{cases}$$

מצאו את a ו־b אם נתון שהפונקציה $f(x)$ גזירה ב־$x=1$ וחשבו את $f'(1)$.

שאלה 2ב (10 נק׳)

הוכח כי עבור $x>1$ מתקיים אי־השוויון: $(x+1)\ln(x)>2(x-1)$.

שאלה 2ג (5 נק׳)

חשבו בקירוב ליניארי את ערך המספר הבא: $\sin\left(\frac{\pi}{4}+0.01\right)$.

שאלה 3א1

חשבו את הגבול (תשתמש בנוסחת טיילור או בכל דרך אחרת):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{1+x^{2}}}{x^{4}}$$

שאלה 3א2

חשבו את הגבול (תשתמש בנוסחת טיילור או בכל דרך אחרת):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}$$

שאלה 3ב (7 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx$$

שאלה 4 (25 נק׳)

א. (20 נק') חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה: $f(x) = x^x$ $(x > 0)$.

ב. (5 נק') קבעו לאילו ערכים של m למשוואה: $|f(x)| = m$ קיים 1) פתרון אחד, 2) שני פתרונות, 3) אין פתרון?

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **314**

תשע״ז · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1א1 (8 נק׳)

חשבו את האינטגרל:

$$\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$$

שאלה 1א2 (8 נק׳)

חשבו את האינטגרל:

$$\int e^{2x+e^x}\,dx$$

שאלה 1ב (9 נק׳)

נתון שהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}$ קיים ושונה מ־0 ו־$\pm\infty$. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו־b וחשבו את הגבול. (רמז: היעזרו בנוסחת טיילור).

שאלה 2א1

חשבו את $f'(0)$ עבור:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+\ln|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

שאלה 2א2

חשבו את $g''(0)$ עבור:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

שאלה 2ב (9 נק׳)

הוכיחו כי אם פונקציה $f(x)$ רציפה ב־$[a;\infty)$ והגבול $\lim_{x\to\infty}f(x)$ קיים וסופי, אזי $f(x)$ חסומה ב־$[a;\infty)$.

שאלה 3א (18 נק׳)

נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}, & x<0\\ a, & x=0\\ x^2\cos\left(\dfrac{4}{3x}\right)+\dfrac{x}{b}, & x>0\end{cases}$$

בדקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b:

א1) הפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה לכל x ממשי.

א2) הפונקציה $f(x)$ תהיה גזירה לכל x ממשי.

שאלה 3ב (7 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\,(\ln x + 1)}$$

שאלה 4 (25 נק׳)

א. (17 נק') חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

ב. (3 נק') מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של $f(x)$ בתחום $[-1;2]$.

ג. (5 נק') קבעו לאילו ערכים של m למשוואה: $|f(x)| = m$ קיים 1) פתרון אחד, 2) שני פתרונות, 3) שלושה פתרונות, 4) ארבע פתרונות, 5) אין פתרון?

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **318**

תשע"ז · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1א1 (7 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$$

שאלה 1א2 (8 נק׳)

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\left(1-\cos\frac{n}{n^2+\sqrt{k}}\right)$$

שאלה 1ב (10 נק׳)

חשבו את אורך העקום הנתון בהצגה פרמטרית:

$$L:=\left\{x(t)=\frac{1}{2}t^2,\ y(t)=\int_0^t\sqrt{\tan^2 x-x^2}\,dx,\ 0\le t\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

שאלה 2א (15 נק׳)

נתונה המשוואה: $\arctan x=ax$. היעזרו בחסימות הנגזרת של $y=\arctan x$ וענו על השאלות הבאות: כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה כאשר $a\ge 1$? כאשר $a\le 0$? כאשר $0<a<1$?

שאלה 2ב (10 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$$

שאלה 3 (25 נק׳)

נתונה פונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{\sin x-\frac{x^2}{2}}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

א. (18 נק') בדקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b פונקציה $f(x)$ תהיה רציפה בנקודה $x=0$. (רמז: היעזרו בנוסחת טיילור).
ב. (7 נק') האם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$? (נמק). בהסתמך על סעיף א' חשבו $f'(0)$.

שאלה 4 (25 נק׳)

א. (15 נק') נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x) = A + \frac{A \cdot (x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

א1. מצאו את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע שהיא חותכת את הצירים בנקודות $(0;\sqrt{2})$, $(-1;0)$.

א2. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ והוכיחו שהיא עולה בכל תחום הגדרתה.

א3. מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$.

ב. (10 נק') נתונה פונקציה נוספת: $g(x) = x + \sqrt{x^2+2x+1}$.

ב1. פשטו את הביטוי $x + \sqrt{x^2+2x+1}$.

ב2. שרטטו באותה מערכת צירים את הגרפים של $f(x)$ ושל $g(x)$.

ב3. קבעו לאילו ערכים של m למשוואה: $f(x) = g(x) + m$ קיים 1) פתרון אחד, 2) שני פתרונות, 3) אין פתרון?

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **322**

תשע״ז · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (25 נק׳)

חשבו ברמת דיוק של $\frac{1}{500}$ את הערך של $\sqrt[3]{29}$. רמז: חשבו היטב סביב איזו נקודה כדאי לפתח לטור טיילור.

שאלה 2 (25 נק׳)

השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $y=\sqrt{x-1}$, $y=\sqrt{5-x}$ וציר ה־x מסתובב סביב ציר ה־x. מצאו את נפח גוף הסיבוב המתקבל.

שאלה 3א

חשבו את האינטגרל

$$\int \sin 3x \sin 6x \, dx$$

שאלה 3ב

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

שאלה 4 (25 נק׳)

נסמן ב־$A(t)$ את השטח מתחת לגרף הפונקציה $f(x)=\sin(x^2)$ בקטע $[0,t]$. נסמן ב־$B(t)$ את שטח משולש ישר זווית בעל ניצבים באורך $t,\ \sin(t^2)$. חשבו את הגבול:

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(t)}{B(t)}$$

שאלה 5

בתחרות המרתון באולימפיאדה שני רצים התחילו וסיימו את הריצה בדיוק באותו הזמן – תיקו. הוכיחו שהיתה נקודת זמן באמצע שבה שני הרצים רצו בדיוק באותה מהירות. (אתם יכולים להניח שכל הפונקציות המעורבות בעניין גזירות ויפות).

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **326**

תשע״ז · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (25 נק׳)

מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$$

שאלה 2 (25 נק׳)

דרך נקודת החיתוך הימנית ביותר של גרף הפונקציה $y=2x^2-x^3$ עם ציר ה־x עובר משיק לגרף הפונקציה. חשבו את השטח בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה־y.

רמז: מומלץ לחקור קצת את הפונקציה בכדי להבין איך נראה השטח שאתם מחפשים.

שאלה 3א

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{dx}{1+x^3}$$

שאלה 3ב

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

שאלה 4 (25 נק׳)

הסתכלו באינטגרל $\int \sin x\cos x\,dx$.

א. (5 נקודות) חשבו את האינטגרל תוך שימוש בהצבה $u=\sin x$.

ב. (5 נקודות) חשבו את האינטגרל תוך שימוש בהצבה $u=\cos x$.

ג. (15 נקודות) הסבירו את התוצאות: האם קיבלתם את אותה הפונקציה בסעיפים א,ב?

שאלה 5 (25 נק׳)

נתונה הפונקציה $f(x)=\int_0^x e^{-\sin(t)+2}\,dt$.

א. הוכיחו שזו חד חד ערכית.

ב. נסמן את הפונקציה ההפוכה ב־g. חשבו את הנגזרת $g'(0)$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **327**

תשע״ו · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה $f(x)=x+\ln(x^2-1)$ (גבולות חד־צדדיים בנקודות האי־רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של הגרף).

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 2 (20 נק׳)

יהי $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ פולינום ממעלה n. הוכיחו כי אם למשוואה $f(x)=0$ קיימים בדיוק n פתרונות ממשיים שונים, אז לכל $1\le k\le n$, למשוואה $f^{(k)}(x)=0$ יש בדיוק $n-k$ פתרונות ממשיים שונים (כאשר $f^{(k)}(x)$ הינה הנגזרת ה־k־ית של $f(x)$).

שאלה 3א1

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$$

שאלה 3א2

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)^{1-x}$$

שאלה 3ב (10 נק׳)

ב. רשמו את פולינום טיילור ממעלה 3 בסביבת הנקודה $x_0=1$ של הפונקציה $f(x)=\int_1^x e^{t^3}\,dt$.
ג1. חשבו בקירוב זה את ערך האינטגרל $\int_1^{1.1} e^{t^3}\,dt$.
ג2. מצאו חסם על השגיאה בחישוב הזה.

שאלה 4א (10 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$$

שאלה 4ב1

חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x-2\cos^2 x+\cos x}\,dx$$

שאלה 4ב2

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)dx$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **329**

תשע״ו · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-4}-2x$ (גבולות חד־צדדיים בנקודות האי־רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של הגרף).

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 2 (20 נק׳)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע $[a;b]$ ומקיימת $f'(a)\cdot f'(b)<0$. הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(a;b)$ כך ש־$f'(c)=0$.

שאלה 3א1

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\left(x\int_{x}^{1}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\right)$$

שאלה 3א2

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-2x^2}}{\sin^2 x}$$

שאלה 3ב (10 נק׳)

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו־b כך שעבור $x\to 0$ מתקיים:

$$ax^2+b\left(e^{x^2}-1\right)-\sin x^2-x^4=o(x^4).$$

שאלה 4א (10 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\,dx$$

שאלה 4ב1

חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+1}\,dx$$

שאלה 4ב2

חשבו את האינטגרל

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **332**

תשע״ו · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1 (10 נק׳)

חשבו את גבול הסדרה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cos\sqrt[n]{n}}{1+3n^2}$$

שאלה 2 (10 נק׳)

חשבו את גבול הפונקציה

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$$

שאלה 3 (10 נק׳)

לאילו ערכים של a,b הפונקציה הבאה רציפה בקטע $[0,1]$?

$$f(x)=\begin{cases}a, & x=0\\ \ln(x)\ln(1-x), & 0<x<1\\ b, & x=1\end{cases}$$

שאלה 4 (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא

$$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\sqrt{1-e^{\frac{2}{x}}}}\,dx$$

שאלה 5 (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא

$$I=\int\frac{dx}{(\tan^4 x+\tan^2 x)\cos^2 x}$$

שאלה 6 (10 נק׳)

חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-t-1\right)dt}{\cos(2x)-1}$$

שאלה 7 (10 נק׳)

מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-\frac{1}{|x|}}, & x\neq 0\end{cases}$$

או הסבירו מדוע אינם קיימים.

שאלה 8 (10 נק׳)

הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים $x\ln x\le\frac{x^2+1}{2}$.

שאלה 9 (10 נק׳)

מהו השטח המקסימלי של משולש שווה שוקיים שהיקפו 1?

שאלה 10 (10 נק׳)

הוכיחו או הפריכו: אם הפונקציה $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז גם הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע זה.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **334**

תשע״ה · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

שאלה 1 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה $f(x)=e^{\arctan|x|}$ (גבולות חד־צדדיים בנקודות האי־רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של הגרף).

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 2א (10 נק׳)

יהי n מספר טבעי. נסמן ב־$P(x)$ את הפולינום ממעלה $2n$:

$$P(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

הראו כי לכל $x<0$ מתקיים $e^x<P(x)$.

שאלה 2ב (10 נק׳)

הוכיחו כי למשוואה $\int_0^x e^{-t^4}dt=x$ יש פתרון אחד ויחיד בקטע $[-1,1]$.

שאלה 3א (15 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}+\frac{a}{x}+e^{b+5}, & x<0\\ e^2, & x=0\\ (1+bx)^{\frac{c}{2x}}, & x>0\end{cases}$$

עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b,c:

1) הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$?

2) לפונקציה $f(x)$ יש אי־רציפות סליקה בנקודה $x=0$?

3) לפונקציה $f(x)$ יש אי־רציפות מסוג ראשון בנקודה $x=0$?

4) לפונקציה $f(x)$ יש אי־רציפות מסוג שני בנקודה $x=0$?

שאלה 3ב (10 נק׳)

ידוע שהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}\neq 0$ קיים וסופי. מצאו את n (מספר טבעי) ואת הגבול.

שאלה 3ג (5 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x\sqrt{4+e^{-t}}\,dt.$$

שאלה 4א (10 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x+1)\sqrt[4]{x^2+\cos x}}.$$

שאלה 4ב (10 נק׳)

מצאו את שטח התחום המוקף על ידי העקומה L המוגדרת במערכת פולרית: $L := \left\{ r = a \left| \sin \frac{3\varphi}{2} \right|,\ a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$.

שאלה 4ג (10 נק׳)

גוף מישורי חסום על ידי הקווים $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$ ו־$x = 2$, מסתובב סביב ציר ה־y. חשבו את נפח הגוף הנוצר.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **337**

תשע״ה · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1 (20 נק׳)

חקרו את הפונקציה $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ (גבולות חד־צדדיים בנקודות האי־רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של הגרף).

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול אינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס, ואפשר לדלג על חלק זה של השאלה. בפתרון, השלבים שעוסקים בהם מסומנים „לא בסילבוס הנוכחי".

שאלה 2א (10 נק׳)

הוכיחו שלכל $x>0$ ולכל $a>0$ מתקיים אי־השוויון הבא:

$$ae^{-ax}<\frac{1-e^{-ax}}{x}<a.$$

שאלה 2ב (10 נק׳)

בעזרת משפט רול הוכיחו כי למשוואה $x\sqrt{x}=e^{-x}$ קיים פתרון יחיד בתחום $[0,\infty)$.

שאלה 3א (12 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

בדקו את הרציפות והגזירות של הפונקציה בנקודה $x=0$.

שאלה 3ב1

חשבו את הגבול (השתמשו בנוסחת טיילור או בכל דרך אחרת):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^4}.$$

שאלה 3ב2

חשבו את הגבול (השתמשו בנוסחת טיילור או בכל דרך אחרת):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}.$$

שאלה 4א (10 נק׳)

חקרו את התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\,(\ln x+1)}.$$

שאלה 4ב (10 נק׳)

מצאו את שטח התחום שחסום על ידי הציקלואידה $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$, $(0\le t\le 2\pi)$, והישרים $y=-x$ ו־$x=4\pi$. שרטטו את סקיצת התחום.

שאלה 4ג (10 נק׳)

חשבו את אורך העקומה $y = \sqrt{e^{2x}-1} - \arctan\sqrt{e^{2x}-1}$, כאשר $0 \le x \le 1$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **339**

תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד מיוחד

שאלה 1א (9 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

שאלה 1ב (9 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x\ln x+5)}{\ln x}.$$

שאלה 2א (9 נק׳)

חשבו את משוואת הישר המשיק לפונקציה $f(x)=x^{\sin x}$ בנקודה $x=\frac{\pi}{2}$.

שאלה 2ב (9 נק׳)

הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים

$$\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}.$$

שאלה 2ג (9 נק׳)

הוכיחו או הפריכו את הטענה: הפונקציה הבאה גזירה בנקודה $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2, & x>0 \\ \sqrt{4-x}, & x\le 0 \end{cases}$$

שאלה 3א (9 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\arctan x)}{x^2+1}\,dx.$$

שאלה 3ב (10 נק׳)

חשבו את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל ע״י סיבוב של התחום הבא סביב ציר ה־x:

$$0\le y\le \frac{x^{3/2}}{\sqrt[4]{9-x^2}},\qquad x\in\left[0,\tfrac{3}{2}\right].$$

שאלה 4א (9 נק׳)

מצאו את **כל** האסימפטוטות האנכיות, האופקיות והמשופעות של הפונקציה $f(x)=\frac{x\ln|x|}{x^2+1}-5x$. במידה ואין אסימפטוטות מסוג מסוים ציינו זאת.

שאלה 4ב (9 נק׳)

תהי $g(x) = x^4 e^{x+5}$. מצאו את התחום של ערכי x כך שבו $g(x)$ קמורה כלפי מעלה.

שאלה זו עוסקת בקמירות, קעירות ונקודות פיתול, נושאים שאינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 5 (9 נק׳)

לכל $a, b \in \mathbb{R}$ תהי $f_{ab} : (0,1) \to \mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה על־ידי $f_{ab}(x) = x^a (1-x)^b$. עבור כל $a, b \in \mathbb{R}$ **ששניהם שונים מאפס**, קבעו אם יש לפונקציה f_{ab} נקודות מקסימום גלובלי בקטע $(0,1)$, ואם כן מצאו נקודות אלה.

שאלה 6 (9 נק׳)

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהיו $p, q \in \mathbb{R}$. הוכיחו שקיים $x_0 \in \mathbb{R}$ המקיים $f(x_0) = \frac{f(p)+f(q)}{2}$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **341**

תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1א (9 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

שאלה 1ב (9 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 3^+} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}.$$

שאלה 2א (9 נק׳)

חשבו את משוואת הישר המשיק לפונקציה $f(x)=e^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$ בנקודה $x=\pi$.

שאלה 2ב (9 נק׳)

הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

שאלה 2ג (9 נק׳)

הוכיחו או הפריכו את הטענה: הפונקציה הבאה גזירה בנקודה $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin^2(\pi x), & x<1 \\ (x-1)\sin^2(\pi x), & x\geq 1 \end{cases}$$

שאלה 3א (9 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^1 (x+3)^2(1-x)^{121}\,dx.$$

שאלה 3ב (10 נק׳)

חשבו את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל ע״י סיבוב של התחום הבא סביב ציר ה־x:

$$0\leq y\leq \frac{1}{x\sqrt[4]{x^2+4}}, \qquad x\in[2,2\sqrt{3}].$$

שאלה 4א (9 נק׳)

מצאו את **כל** האסימפטוטות האנכיות, האופקיות והמשופעות של הפונקציה $f(x)=3x+e^{-2x}\sin^2 x$. במידה ואין אסימפטוטות מסוג מסוים ציינו זאת.

שאלה 4ב (9 נק׳)

תהי $g(x) = 2\ln(x^2+1) - 4x\arctan x + x^2$. מצאו את התחום של ערכי x כך שבו $g(x)$ קמורה כלפי מעלה.

שאלה זו עוסקת בקמירות, קעירות ונקודות פיתול, נושאים שאינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 5 (9 נק׳)

מיכל שצורתו היא חרוט הפוך עם זווית פתיחה של $\pi/3$ מלא ב־3π ליטר מים. ברגע מסוים נפתח פתח בתחתית המיכל והמים מתחילים לזרום החוצה בקצב של 2 ליטר לשנייה. מהו קצב ירידת מפלס המים ברגע בו נפתח הפתח?

שאלה 6 (9 נק׳)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2. הוכיחו שקיימת לפחות נקודה **אחת** $a\in[0,1]$ המקיימת $f(a+1)=f(a)$.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **343**

תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד א׳

שאלה 1א (9 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}.$$

שאלה 1ב (9 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

שאלה 2א (9 נק׳)

חשבו את משוואת הישר המשיק לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{\frac{5-x}{x^2+3}}$ בנקודה $x=-2$.

שאלה 2ב (9 נק׳)

מצאו את כל נקודות האי־רציפות של הפונקציה הבאה ומיינו אותן:

$$f(x)=\begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)+e^{\frac{1}{x-2}}, & x\neq 1,2 \\ 1, & x=1,2 \end{cases}$$

שאלה 2ג (9 נק׳)

הוכיחו או הפריכו את הטענה: הפונקציה $f(x)=|\sin(x^2)|$ גזירה בנקודה $x=\sqrt{\pi}$.

שאלה 3א (9 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx.$$

שאלה 3ב (10 נק׳)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{12x^3+11x^2+8x+12}{x^4+4x^2}\,dx.$$

שאלה 4א (9 נק׳)

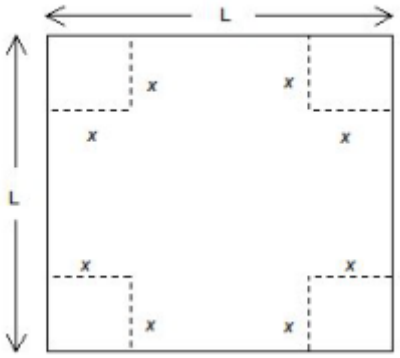
תהי $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. חשבו את כל האסימפטוטות של f.

שאלה 4ב (9 נק׳)

תהי $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. האם יש לפונקציה f נקודות מקסימום ומינימום גלובליים? אם כן, מצאו אותם ואם לא, נמקו.

שאלה 5 (9 נק׳)

קופסת מתכת ללא מכסה נבנית מלוח מתכת ריבועי בעל אורך צלע L על־ידי חיתוך ריבועי מתכת בעלי אורך צלע x מארבע הפינות של לוח המתכת וקיפול הדפנות המתקבלות בדרך זו. מהו הנפח המקסימלי האפשרי של קופסאות המתכת המתקבלות בדרך זו?



שאלה 6 (9 נק׳)

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f(n) = (-\pi)^n$ כאשר $n \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי f' אינה חסומה.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **346**

תשע״ד · סמסטר ב׳ · מועד א׳

שאלה 1 (10 נק׳)

הראו כי לכל $a > b > 0$ מתקיים $1 - \frac{b}{a} \le \ln\left(\frac{a}{b}\right) \le \frac{a}{b} - 1$.

שאלה 2א (12 נק׳)

נתונה סדרה $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$, $n \ge 1$. האם הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת? אם כן מצאו את גבולה. אם לא הסבירו מדוע. נמקו את תשובתכם.

שאלה 2ב (8 נק׳)

נתונה סדרה $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$, $n \ge 1$. תהי $\{b_n\}$ סדרה, כך שלכל n טבעי מתקיים $|b_n| \le a_n$ (הסדרה $\{a_n\}$ היא אותה סדרה מסעיף א). האם הסדרה $\{b_n\}$ מתכנסת? אם כן מצאו את גבולה. אם לא הסבירו מדוע. נמקו את תשובתכם.

שאלה 3א (10 נק׳)

מצאו פונקציה קדומה של $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

שאלה 3ב (10 נק׳)

מצאו פונקציה קדומה של $g(x) = x^2 e^{-x}$.

שאלה 4א (10 נק׳)

בדקו את התכנסות הסדרה $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $n \ge 1$.

שאלה 4ב (10 נק׳)

בדקו את התכנסות הסדרה $b_n = \left(\frac{n^2+3n+5}{n^2-2n+7}\right)^{3n}$, $n \ge 1$.

שאלה 5 (10 נק׳)

הראו כי לפולינום $p(x) = x^3 + 7x + 8$ קיים שורש אחד בלבד.

שאלה 6א (10 נק׳)

סווגו את נקודות האי־רציפות של הפונקציה $f(x) = \frac{3}{4 - 2^{\frac{x}{1-x}}}$.

שאלה 6ב (5 נק׳)

סווגו את נקודות האי־רציפות של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{7x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד 348

תשע״ד · סמסטר א׳ · מועד ב׳

שאלה 1א (7 נק׳)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x.$$

שאלה 1ב (7 נק׳)

חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$ כאשר הסדרה a_n מוגדרת על ידי $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$. (מותר להניח ללא הוכחה שהסידרה מתכנסת.)

שאלה 2א (7 נק׳)

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int (1+\cos(2x))e^{-3x}\,dx.$$

שאלה 2ב (9 נק׳)

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\cos^3(x)\,dx.$$

שאלה 2ג (9 נק׳)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(2)=5, f(2)=3, f(6)=\frac{1}{2}$. נגדיר: $g(x)=\int_0^{xf(x)} f(t)\,dt$. חשבו את הנגזרת $g'(2)$.

שאלה 2ד (10 נק׳)

חשבו את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל ע״י סיבוב של התחום הנתון סביב ציר ה־x: $y \ge x^2,\ y \le 2|x|$.

שאלה 3א (8 נק׳)

הוכיחו שלמשוואה $1 + x + e^x = 0$ **קיים** פתרון ממשי **יחיד**.

שאלה 3ב (8 נק׳)

נסמן ב־a את הפתרון היחיד של המשוואה $1 + x + e^x = 0$ (מהסעיף הקודם). תהי

$$f(x) = \frac{xe^x}{1 + x + e^x}.$$

מצאו את כל האסימפטוטות של f (מותר להשתמש ב־a כחלק מתשובתכם בלי לחשב את ערכו).

שאלה 4 (10 נק׳)

מבין כל זוגות המספרים הממשיים החיוביים a, b שמכפלתם 16, מצאו את הזוג עבורו הערך של $a + b^2$ הוא הקטן ביותר.

שאלה 5 (15 נק׳)

עבור אילו ערכים של a ממשי הפונקציה $f(x) = \left(e^{ax+1}+1\right)^2 + x^2$ קמורה כלפי מעלה?

שאלה זו עוסקת בקמירות, קעירות ונקודות פיתול, נושאים שאינם נכללים בסילבוס הנוכחי של הקורס.

שאלה 6 (10 נק׳)

מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

כאשר $\mathbb{Q}$ היא קבוצת הרציונליים.

הפתרונות לבחינה זו מתחילים בעמוד **351**

חלק ג׳: פתרונות

תשפ״ו · סמסטר ב׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 5

שאלה 1א פתרון רשמי

שני האגפים אי־שליליים, ולכן אי־השוויון שקול ל־$|3x-1|^2 \le |1-x|^2$.

כלומר $9x^2-6x+1 \le 1-2x+x^2$, ולאחר פישוט $8x^2-4x = x(8x-4) \ge 0$.

מכפלה אי־שלילית: $8x-4 \ge 0,\ x \ge 0$ או $8x-4 \le 0,\ x \le 0$, כלומר $x \ge \frac{1}{2}$ או $x \le 0$.

תשובה: $x \le 0$ או $x \ge \frac{1}{2}$.

שאלה 1ב פתרון רשמי

נסמן $a_n = \frac{\sqrt{n^2+\sin n}}{n}$ ויהי $\varepsilon > 0$. אז $|a_n - 1| = \left|\frac{\sqrt{n^2+\sin n}-n}{n}\right|$.

כפל בצמוד: $|a_n-1| = \frac{|\sin n|}{n\left(\sqrt{n^2+\sin n}+n\right)} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n^2}$ לכל $n \ge 1$.

נבחר $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. אז לכל $n > N$: $|a_n-1| \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, כמבוקש.

תשובה: הוכחה עם $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$.

שאלה 2א פתרון רשמי

ראשית נראה באינדוקציה כי הסדרה חיובית ויורדת ממש, כלומר $0 < a_{n+1} < a_n$ לכל $n \ge 1$. בסיס: מאחר ש־$0 < a_1 < 1$, מתקיים

$$0 < a_2 = a_1^2 < a_1.$$

צעד: אם $0 < a_{n+1} < a_n$, אז

$$0 < a_{n+2} = a_{n+1}^2 < a_n^2 = a_{n+1}.$$

לכן הסדרה יורדת ממש.

כל איבר הוא ריבוע ולכן אי־שלילי, כלומר הסדרה חסומה מלרע ומכאן מתכנסת לגבול L.

מעבר לגבול ב־$a_{n+1} = a_n^2$ נותן $L = L^2$, כלומר $L = 0$ או $L = 1$. הסדרה יורדת ו־$a_1 < 1$, לכן $L \le a_1 < 1$ ו־$L = 0$.

תשובה: הסדרה יורדת ו־$a_n \to 0$.

שאלה 2ב פתרון רשמי

נפצל לאינדקסים זוגיים ואי־זוגיים, שתי תת־סדרות המכסות את כל הסדרה.

$a_{2n} = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n} = \left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2\cdot 2n}{2n-1}} \to e^2$, לפי $(1+b_n)^{1/b_n} \to e$ כאשר $b_n \to 0$.

$a_{2n+1} = \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{2n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{-(2n+1)}{n+1}} \to e^{-2}$.

לכן הגבולות החלקיים הם בדיוק e^2 ו־e^{-2}.

תשובה: $e^2,\ e^{-2}$.

שאלה 3א פתרון רשמי

נסמן את המכנה b_n. זהו סכום של n מחוברים, הגדול ביותר $\frac{1}{\sqrt{9n^2+1}}$ והקטן ביותר $\frac{1}{\sqrt{9n^2+n}}$.

לכן $\frac{n}{\sqrt{9n^2+1}} \le b_n \le \frac{n}{\sqrt{9n^2+n}}$, ושני החסמים שואפים ל־$\frac{1}{3}$.

מכלל הסנדוויץ' $b_n \to \frac{1}{3}$, ולפי אריתמטיקה של גבולות הגבול המבוקש הוא 3.

תשובה: 3

שאלה 3ב פתרון רשמי

המונה חסום: $0 \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 3 \le 6$.

לכן $\frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{n} = \frac{1}{n}\cdot \sqrt[n]{2^n+3^n}$ היא מכפלה של סדרה חסומה בסדרה השואפת לאפס, והגבול 0.

תשובה: 0

שאלה 4א פתרון רשמי

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_n = \frac{2}{n} \to 0$.

מתקיים $a_n < b_n$ לכל $n \ge 1$, אבל $L_1 = L_2 = 0$. (דוגמה נוספת: $a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{n}$.)

תשובה: לא נכון (מעבר לגבול שומר רק על אי־שוויון חלש).

שאלה 4ב פתרון רשמי

הטענה נכונה. נעביר אגפים: $|a_n|(n^2+1) \le n$, כלומר $0 \le |a_n| \le \frac{n}{n^2+1}$.

מאחר ש־$\frac{n}{n^2+1} \to 0$, מכלל הסנדוויץ' $|a_n| \to 0$ ולכן $a_n \to 0$.

תשובה: נכון, $a_n \to 0$.

שאלה 4ג פתרון רשמי

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: הסדרה $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ (כלומר $a_n = \lceil n/2 \rceil$).

היא שואפת ל־∞, אבל לכל N יש $n > N$ עם $a_{n+1} = a_n$, ולכן אין N כנדרש.

תשובה: לא נכון.

תשפ"ו · סמסטר א׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 6

שאלה 1 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ב.

שני האגפים אי־שליליים, ולכן אפשר להעלות בריבוע: $|2x+1|<|x+2| \iff (2x+1)^2<(x+2)^2$.

פתיחת סוגריים: $4x^2+4x+1<x^2+4x+4$, כלומר $3x^2-3<0$.

מכאן $x^2<1$, כלומר $-1<x<1$.

תשובה: $(-1,1)$ – תשובה ב.

שאלה 2 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ד.

ידוע ש־$\lim \frac{\sin n}{n}=0$ וגם $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=e^2$. נבדוק את תת־הסדרות הזוגית והאי־זוגית.

עבור $n=2k$: $a_{2k}=-1+\frac{\sin 2k}{2k}+\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{4k}\to -1+0+e^2=e^2-1$.

עבור $n=2k-1$: $a_{2k-1}=1+\frac{\sin(2k-1)}{2k-1}-\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{4k-2}\to 1-e^2$, שאינו מופיע ברשימה.

תת־הסדרות הזוגית והאי־זוגית מכסות את כל הסדרה, ולכן הגבולות החלקיים הם e^2-1 ו־$1-e^2$ בלבד.

תשובה: e^2-1 – תשובה ד.

שאלה 3 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

נגדיר $h(x)=f(x)+5-3x$, רציפה ב־$[2,7]$. $h(2)=9+5-6=8>0$ ו־$h(7)=-2+5-21=-18<0$, ולפי משפט ערך הביניים יש c עם $h(c)=0$, כלומר $f(c)+5=3c$. לכן טענה א נכונה.

טענה ב (שני פתרונות ל־$f=\sin x$) שגויה: עבור הפונקציה הלינארית $f(x)=9-\frac{11}{5}(x-2)$, יורדת ו־$\sin x$ יכולה לחתוך אותה פעם אחת לכל היותר.

טענה ג שגויה: $f(2)-(2^2+8)<0$, ואפשר לבנות f רציפה עם $f(4)=100>2^4+8$, ואז יש פתרון ב־$(2,4)$.

טענה ד שגויה: עבור אותה פונקציה לינארית $f(x)\le 9<12\le 3x^2$ בכל הקטע.

טענה ה שגויה: $k(x)=f(x)+10-x^3$ מקיימת $k(2)=11>0$, $k(7)=-335<0$, ולכן דווקא יש פתרון.

תשובה: תשובה א.

שאלה 4 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ה.

נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת, $L=\lim a_n$.

לפי אריתמטיקה של גבולות: $L=\lim a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}+L\right)^2=\frac{1}{4}+L+L^2$, ולכן $L^2=-\frac{1}{4}$.

אין $L\in\mathbb{R}$ כזה – סתירה. לכן הסדרה אינה מתכנסת.

תשובה: הסדרה אינה מתכנסת – תשובה ה.

שאלה 5 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ג.

נדרוש $f(0)=b(a-2)=\lim_{x\to0^+}f=\lim_{x\to0^-}f$. משמאל חייבים $a\neq0$, ואז $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{\sin(a^2x)}=\lim\frac{2x}{a^2x}=\frac{2}{a^2}$.

מימין: $\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\ln4}=(\cos x)^{\frac{\ln4}{x\ln(1+x)}}\to e^{-\frac12\ln4}=\frac12$.

לכן $\frac{2}{a^2}=\frac12$, כלומר $a=\pm2$, וגם $b(a-2)=\frac12$.

עבור $a=2$ נקבל $f(0)=0\neq\frac12$. עבור $a=-2$: $-4b=\frac12$, כלומר $b=-\frac18$.

תשובה: $a=-2,\ b=-\frac18$ – תשובה ג.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ב.

נוכיח את טענה ב. נניח $\lim\frac{1}{a_n}=\infty$ ו־$a_n\neq0$. יהי $\varepsilon>0$ ונגדיר $M=\frac{1}{\varepsilon}$. קיים N כך שלכל $n\geq N$: $\frac{1}{a_n}>M=\frac{1}{\varepsilon}>0$.

לכן $a_n>0$ ו־$a_n<\varepsilon$, כלומר $|a_n|<\varepsilon$ לכל $n\geq N$, ולכן $a_n\to0$.

דוגמאות נגדיות: (א) $a_n=n$, $b_n=0$ עבור n אי־זוגי ו־$b_n=n$ עבור n זוגי – b_n לא חסומה אך $|a_nb_n|$ מתאפסת אינסוף פעמים. (ג) $a_n=(-1)^nn$. (ד) $a_1=-100$, $a_n=n$ עבור $n\geq2$. (ה) $a_n=n+(-1)^n$ אינה מונוטונית.

תשובה: תשובה ב.

שאלה 7 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ה.

לפי הגדרת הגבול, לכל M קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x<a$ מתקיים $f(x)>M$. עבור $M=2$ מקבלים את טענה ה, ולכן היא נכונה.

(א) שגויה: $f(x)=x^2$ – לכל a יש $x>a$ עם $f(x)\geq10$.

(ב) שגויה: היא סותרת את הנתון, כי אז f לא הייתה שואפת ל־∞ כאשר $x\to-\infty$.

(ד) שגויה: $f(x)=x^2$ עבור $x\leq0$ ו־$f(x)=0$ עבור $x>0$. (ג) שגויה כי ה נכונה.

תשובה: תשובה ה.

שאלה 8 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ג.

נשתמש בכלל הסנדוויץ׳: ניקח את המונה הקטן ביותר עם המכנה הגדול ביותר, ולהפך.

$n\cdot\frac{n^2+1}{2n^3+n}\leq a_n\leq n\cdot\frac{n^2+n}{2n^3+1}$.

$n\cdot\frac{n^2+1}{2n^3+n}=\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}\to\frac12$ וגם $n\cdot\frac{n^2+n}{2n^3+1}=\frac{1+\frac1n}{2+\frac{1}{n^3}}\to\frac12$.

תשובה: $\frac12$ – תשובה ג.

שאלה 9 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

נוכיח את א. f רציפה וחיובית על $[a,b]$, ולפי ויירשטראס מקבלת מינימום $m>0$, כלומר $|f(x)|\geq m$ ולכן $\left|\frac{1}{f(x)}\right|\leq\frac{1}{m}$.

אם $|g(x)|\leq M$, אז $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leq\frac{M}{m}$, כלומר $\frac{g}{f}$ חסומה.

(ד) שגויה: על $[0,1]$, $f\equiv 1$, $g(0)=1$ ו־$g(x)=x^{-}$ עבור $0<x\leq 1$; אז $\frac{f}{g}=\frac{1}{x}$ אינה חסומה. (ג) שגויה: על $(0,1)$, $f(x)=x$, $g\equiv 1$. (ה) שגויה: על $(0,1)$, $f\equiv 1$, $g(x)=x$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 10 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ד.

נכתוב $2=4\cdot\frac{1}{2}\to 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\ln(1+4x)\cdot\frac{\sin(\sin x)}{2\sin^2 x}$.

לגורם האמצעי: $\frac{\frac{9}{6}+\frac{4}{8}}{3}=\frac{2}{3}\to\frac{9\cdot\frac{(1+9x)^{1/6}-1}{9x}-(-4)\cdot\frac{(1-4x)^{1/8}-1}{-4x}}{3\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}}=\frac{\sqrt[6]{1+9x}-\sqrt[8]{1-4x}}{e^{3x}-1}$.

סך הכול $2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

תשובה: $\frac{4}{3}$ – תשובה ד.

תשפ״ה · סמסטר א׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 9

שאלה 1 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

טענה א נכונה. נכתוב $f^3=h\circ f$ כאשר $h(t)=t^3$ היא התאמה חח״ע ועל מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$; הרכבה של התאמות חח״ע ועל היא חח״ע ועל.

טענות ב, ג אינן נכונות: עבור $f(x)=x$ מתקבל $f^2=x^2$, שאינה חח״ע ואינה על (אינה מקבלת ערכים שליליים).

טענות ד, ה אינן נכונות: עבור $f(x)=1$ כאשר x רציונלי ו־$f(x)=-1$ אחרת, $f^2\equiv 1$ רציפה וגזירה, אבל f אינה רציפה באף נקודה.

תשובה: תשובה א.

שאלה 2 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נבדוק את הזוגיות של כל אחת מהפונקציות. מתקיים

$$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = h(x),$$

לכן h זוגית.

באופן דומה,

$$k(-x) = f(-x)g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -k(x),$$

לכן k אי־זוגית.

תשובה: תשובה א.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

טענה א נכונה: אם $L = 1$ אז $a_n \to 1$ ו־$b_n \to 1$, ולפי כלל הסנדוויץ׳ $c_n \to 1$.

טענה ב אינה נכונה: אם $L = 2$, $a_n = 2$, $b_n = 4$ ו־$c_n = 3 + (-1)^n$, הגבול של c_n אינו קיים.

טענות ג, ד אינן נכונות: עבור $L = -1$, $a_n = -1$, $b_n = 1$: אפשר $c_n = \frac{1}{n} \to 0$ או $c_n = 1 \to 1$, אף ש־$L \neq 0, 1$.

טענה ה אינה נכונה: עבור $L = 0$ המנה אינה בהכרח מוגדרת (למשל $a_n = 0$).

תשובה: תשובה א.

שאלה 4 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

כאשר $a_n \to \infty$, מהגבול $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$ כאשר $x \to \infty$ נקבל

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e.$$

לכן הגבול לא יכול להיות 1, ואפשרות א לא ייתכן.

שאר האפשרויות ייתכנו, למשל:

אפשרות ב: $a_n = n + (-1)^n \cdot \frac{n}{2}$.

אפשרות ג: $a_n = n^2$.

אפשרות ד: $a_n = e^n$.

אפשרות ה: $a_n = n!$.

אפשרות ו: $a_n = n$ עבור n זוגי ו־$a_n = n^2$ עבור n אי־זוגי.

תשובה: תשובה א.

שאלה 5 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נגדיר $g(x) = f(x) - 2x - 8$. הפונקציה g רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהפרש של פונקציות רציפות: f רציפה לפי הנתון, ו־$2x + 8$ פולינום.

מתקיים $g(0) = 4 > 0$ ו־$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, לכן יש $b > 0$ עם $g(b) < 0$. לפי משפט ערך הביניים בקטע $[0, b]$ יש ל־g שורש ב־$(0, b)$, ולכן א נכונה.

טענות ב ו־ג אינן בהכרח נכונות: f יכולה לעלות מ־12 ל־20 ואז לרדת ולשאוף ל־-7. כך היא אינה מונוטונית, מקבלת את הערך 17 , ואת הערך 5 רק פעם אחת.

טענה ד אינה בהכרח נכונה. למשל $f(x) = -7 + 19e^{-x/10}$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה וסכום של פונקציות רציפות, מקיימת $f(0) = 12$ ו־$f(x) \to -7$, ו־$f(x) > 3 - x^2$ לכל $x \geq 0$: עבור $0 \leq x \leq \sqrt{10}$ מתקיים $f(x) \geq -7 + 19e^{-0.32} > 6 > 3 - x^2$, ועבור $x > \sqrt{10}$ מתקיים $f(x) > -7 > 3 - x^2$.

טענה ה אינה בהכרח נכונה: f יכולה לקבל את הערך -7 בנקודה סופית, למשל לרדת מתחת ל־-7 ואז לחזור ולשאוף אליו.

תשובה: תשובה א.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נחשב את הגבולות החד־צדדיים ב־0 ונשווה אותם ל־B. משמאל:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} = \lim \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 2 = 2.$$

מימין:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 + Ax} - 1}{x} = \lim \frac{A}{\sqrt{1 + Ax} + 1} = \frac{A}{2}.$$

בשוויון האחרון הצבנו $x = 0$, כי $\frac{A}{\sqrt{1+Ax}+1}$ רציפה בסביבת 0 כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס.

מתנאי הרציפות נקבל $B = 2$ ו־$\frac{A}{2} = 2$, כלומר $A = 4$.

תשובה: תשובה א: $A = 4,\ B = 2$.

שאלה 7 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נשווה את הגבולות החד־צדדיים ב־0 וב־4 לערכי הענף האמצעי, שהוא פולינום ולכן רציף ב־$[0,4]$.

כאשר $x \to 0^-$ זהו גבול מהצורה 1^∞, השווה (מרציפות e^x) לביטוי

$$e^{\lim \frac{x\sin(5x)\ln 2}{\cos 2x-\cos 3x}}.$$

לפי טיילור $x\sin 5x \sim 5x^2$ ו־$\cos 2x-\cos 3x \sim \frac{9x^2-4x^2}{2}=\frac{5x^2}{2}$, לכן המעריך שואף ל־$2\ln 2$ והגבול הוא 4. לכן $B=f(0)=4$.

כאשר $x \to 4^+$ זהו גבול $\frac{0}{0}$; לפי לופיטל

$$\lim \frac{3/\sqrt{1+2x}}{1/(2\sqrt{x})}=\frac{3/3}{1/4}=4$$

(הצבנו $x=4$ במנה, הרציפה ב־4 כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס).

מהרציפות ב־4 נקבל $4A+B=4$, ולכן $A=0$.

תשובה: תשובה א: $A=0,\ B=4$.

שאלה 8 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

לפי כלל השרשרת:

$$(g\circ h\circ f)'(2)=g'(h(f(2)))\cdot h'(f(2))\cdot f'(2).$$

מתקיים $f(2)=2$, $h(2)=2$, $h'(x)=2x \Rightarrow h'(2)=4$. לכן הנגזרת היא

$$g'(2)\cdot 4\cdot 5=(-1)\cdot 4\cdot 5=-20.$$

תשובה: תשובה א: -20.

שאלה 9 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נחשב את ערך הפונקציה ואת הנגזרת בנקודה $x=3$: $f(3)=4\cdot 2=8$, וגם

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(3)=1.$$

לכן הקירוב הלינארי הוא $p(x)=8+(x-3)$, ומכאן $p(3.5)=8.5$.

תשובה: תשובה א: 8.5.

שאלה 10 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נבדוק גזירות ב־7 לפי ההגדרה:

$$\frac{f(x)-f(7)}{x-7}=(x-7)\sin\frac{1}{x-7}\to 0$$

(חסומה כפול אפסה), לכן $f'(7)=0$.

עבור $x\neq 7$:

$$f'(x)=2(x-7)\sin\frac{1}{x-7}-\cos\frac{1}{x-7}.$$

האיבר הראשון שואף ל־0 והשני אינו מתכנס כאשר $x\to 7$, לכן f' אינה רציפה ב־7 (ובפרט אינה גזירה שם).

תשובה: תשובה א.

תשפ״ג · סמסטר ב׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 12

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. שורש זוגי במכנה: צריך $x^5-2>0$, כלומר $x^5>2$, $x>\sqrt[5]{2}$. התחום: $\left(\sqrt[5]{2},\infty\right)$.

ב. הביטוי x^5-2 רציף כפולינום, וכאשר x רץ על התחום הוא מקבל כל ערך ב־$(0,\infty)$. לכן גם $\sqrt[6]{x^5-2}$ ו־$y=\frac{1}{\sqrt[6]{x^5-2}}$ מקבלים כל ערך חיובי. התמונה: $(0,\infty)$.

ג. הפונקציה x^5-2 עולה ממש, השורש השישי עולה ממש, ו־$\frac{1}{t}$ יורדת ממש עבור $t>0$. לכן y יורדת ממש בתחומה, ובפרט חד־חד־ערכית.

ד. הפונקציה חח״ע ועל התמונה $(0,\infty)$, ולכן קיימת הפוכה. מ־$y^6=\frac{1}{x^5-2}$ נקבל $x^5=2+\frac{1}{y^6}$, כלומר

$$x=\sqrt[5]{2+y^{-6}}.$$

ההפוכה:

$$f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2+\frac{1}{x^6}},$$

מוגדרת עבור $x>0$, עם תמונה $\left(\sqrt[5]{2},\infty\right)$.

תשובה: תחום $(\sqrt[5]{2},\infty)$; תמונה $(0,\infty)$; חח״ע (יורדת ממש); $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2+x^{-6}}$, $x>0$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח שהסדרה מונוטונית וחסומה. תחילה, באינדוקציה $a_n > 0$ לכל n: $a_1 > 0$, ואם $a_n > 0$ אז

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n} > 0.$$

מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2 + a_n} < \frac{1}{2} < 1,$$

לכן הסדרה יורדת ממש וחסומה מלרע על ידי 0, ולכן מתכנסת לגבול $L \geq 0$.

מעבר לגבול:

$$L = \frac{L}{2 + L} \Rightarrow L(2 + L) = L \Rightarrow L(L + 1) = 0,$$

ולכן $L = 0$ (כי $L \geq 0$).

תשובה: הסדרה יורדת וחסומה מלרע, וגבולה 0.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נניח שקיימת. מאחר ש־$a_n \to \infty$, החל מ־N_1 מסוים $a_n > 0$.

מאחר ש־$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$, החל מ־$N_2$ מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$. אז עבור $n \geq N = \max(N_1, N_2)$:

$$0 < a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n.$$

באינדוקציה

$$0 < a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} a_N \to 0,$$

ולכן $a_n \to 0$ — בסתירה ל־$a_n \to \infty$.

תשובה: לא קיימת: מבחן המנה נותן $a_n \to 0$.

שאלה 2ג

נבדק על ידי צוות הקורס

כן. למשל $a_n = 17^n$.

אכן, $17^n \to \infty$ כי $17 > 1$, וגם

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{17^{n+1}}{17^n} = 17$$

לכל n.

תשובה: כן, למשל $a_n = 17^n$.

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק היכן f מוגדרת ורציפה, ואחר כך נחשב גבולות חד־צדדיים. **תחום:** הענף $\ln(x-1)$ (בגלל $x>1$) מוגדר רק עבור $x<2$; המכנה $e^{t}-e^{-t}$ עם $t=x-2$ מתאפס רק ב־$t=0$. בענף $x\geq 2$ הביטוי ב־$x=2$ עצמו אינו מוגדר (מעריך $\frac{1}{0}$). לכן f מוגדרת ב־$(1,2)\cup(2,\infty)$ ורציפה שם כהרכבה של פונקציות אלמנטריות; אין היא רציפה "על כל הישר".

גבול משמאל ל־2: נציב $t=x-2\to 0^{-}$:

$$\frac{\ln(1+t)}{e^{t}-e^{-t}}=\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\frac{1}{\frac{e^{t}-1}{t}+\frac{e^{-t}-1}{-t}}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

לפי הגבולות היסודיים $\frac{\ln(1+t)}{t}\to 1$, $\frac{e^{t}-1}{t}\to 1$.

גבול מימין ל־2: עם $t\to 0^{+}$ נכתוב את הבסיס כ־$1+u(t)$, כאשר

$$u=\frac{(2^{t}-1)+(8^{t}-1)+(4^{t}-1)}{3}\to 0.$$

לפי $\frac{a^{t}-1}{t}\to\ln a$:

$$\frac{u}{t}\to\frac{\ln 2+\ln 8+\ln 4}{3}=\frac{\ln 64}{3}=2\ln 2.$$

לכן, מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$ ושל e^{x} ב־$\mathbb{R}$, נקבל

$$(1+u)^{1/t}=\Big[(1+u)^{1/u}\Big]^{u/t}\to e^{2\ln 2}=4.$$

מסקנה: בנקודה $x=2$ הגבולות החד־צדדיים סופיים ושונים ($4\neq\frac{1}{2}$) — אי־רציפות מסוג ראשון (קפיצה). בנקודה $x=1$ (קצה התחום) $\lim_{x\to 1^{+}}f(x)=+\infty$ כי $\ln(x-1)\to-\infty$ והמכנה $e^{-1}-e<0$ — אם מתייחסים לנקודה זו, זו אי־רציפות מסוג שני. עבור $x<1$ הפונקציה אינה מוגדרת.

תשובה: f רציפה ב־$(1,2)\cup(2,\infty)$; ב־$x=2$ קפיצה ($f(2^{+})=4,\ f(2^{-})=\frac{1}{2}$); ב־$x=1$ גבול מימין $+\infty$ (מסוג שני); עבור $x\leq 1$ לא מוגדרת.

תשפ"ג · סמסטר א' · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 13

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

חסימות: נוכיח באינדוקציה ש־$0<a_n<2$. עבור $n=1$: $a_1=1$. אם $0<a_n<2$ אז

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}<\sqrt{4}=2$$

וגם $a_{n+1}>0$.

מונוטוניות: מתקיים

$$a_{n+1}^{2}-a_n^{2}=a_n+2-a_n^{2}=(2-a_n)(1+a_n)>0$$

כי $0<a_n<2$. מאחר ששני האיברים חיוביים, $a_{n+1}>a_n$, כלומר הסדרה עולה ממש.

לפי משפט: סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל מתכנסת לגבול סופי L.

(להשלמה) מעבר לגבול בנוסחת הנסיגה, מרציפות פונקציית השורש ב־$[0,\infty)$: $L=\sqrt{L+2}$, כלומר $L^{2}-L-2=0$, ומכיוון ש־$L\geq 1$ נקבל $L=2$.

תשובה: הסדרה עולה וחסומה על ידי 2, ולכן מתכנסת (לגבול 2).

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

נבדוק תחילה את טענות א ו־ב: לכל x מתקיים $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1$, ולכן $1 \le x - \lfloor x \rfloor + 1 < 2$: הלוגריתם מוגדר תמיד, ו־f מוגדרת בכל $\mathbb{R}$. בנוסף $|\arctan| < \frac{\pi}{2}$, כך ש־$f$ חסומה. לכן א ו־ב אינן נכונות.

בכל קטע $(k, k+1)$ עם k שלם מתקיים

$$f(x) = \arctan(\ln(x - k + 1)),$$

פונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות (הארגומנט של הלוגריתם חיובי).

בנקודה שלמה k נחשב את הגבולות בהצבה, כי הנוסחאות מהשלב הקודם רציפות גם בקצות הקטעים:

$$f(k) = \arctan(\ln 1) = 0 = \lim_{x \to k^+} f(x),$$

אבל

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \arctan(\ln 2) \neq 0.$$

שני הגבולות החד־צדדיים סופיים ושונים, ולכן בכל מספר שלם יש נקודת אי־רציפות מסוג קפיצה. יש אינסוף כאלה, כך שהטענה ד נכונה (ו־ג אינה נכונה).

תשובה: תשובה ד: יש אינסוף נקודות אי־רציפות מסוג קפיצה (בכל המספרים השלמים).

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

האיבר הדומיננט במונה ובמכנה הוא 2^n. נחלק את המונה ואת המכנה ב־2^n:

$$\frac{1 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{\sin(8n)}{2^n}}{3 + \frac{3}{2^n} + \frac{5n^2}{2^n} + \frac{\sin n}{2^n}}.$$

מתקיים $\frac{n^2}{2^n} \to 0$ (חזקה מול אקספוננט), ו־$\frac{\sin(8n)}{2^n}$, $\frac{\sin n}{2^n} \to 0$ כי זו סדרה חסומה כפול סדרה השואפת לאפס.

לפי אריתמטיקה של גבולות הגבול הוא $\frac{1}{3}$.

תשובה: תשובה ב: $\frac{1}{3}$.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נפריד את הגבול לשני גורמים. נכתוב

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{3x}{2x} \to \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2},$$

לפי הגבול היסודי $\frac{\sin t}{t} \to 1$.

הפונקציה $\frac{\cos(5x)}{\cos(7x)}$ רציפה ב־0 כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ולכן

$$\frac{\cos(5x)}{\cos(7x)} \to \frac{1}{1} = 1.$$

לכן הגבול הוא $\frac{3}{2}$.

תשובה: תשובה ב: $\frac{3}{2}$.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

נבדוק כל סדרה. הסדרה $b_n = a_{2n}$ היא תת־סדרה של סדרה השואפת ל־∞, ולכן גם היא שואפת ל־∞.

מתקיים

$$c_n = n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{n}{2\sqrt{n+1}} \to \infty.$$

מתקיים

$$d_n = (2 - (-1)^n)\sqrt{n} \geq \sqrt{n} \to \infty,$$

כי $2 - (-1)^n \geq 1$.

מתקיים

$$e_n = \frac{n}{n^2 + \sqrt{n} + 1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0,$$

ולכן $e_n \to 0$ ואינה שואפת לאינסוף.

תשובה: תשובה ד: e_n (שואפת ל־0).

תשפ"ב · סמסטר ב' · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **15**

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. שורש זוגי במכנה: נדרש $x^5 - 2 > 0$, כלומר $x > \sqrt[5]{2}$. תחום ההגדרה: $\left(\sqrt[5]{2}, \infty\right)$.

ב. כאשר x עובר על התחום, $u = x^5 - 2$ (פונקציה רציפה כפולינום) מקבל את כל הערכים ב־$(0, \infty)$, ולכן $y = u^{-1/6}$ מקבל את כל הערכים ב־$(0, \infty)$. התמונה: $(0, \infty)$.

ג. הפונקציה $x^5 - 2$ עולה ממש, השורש השישי עולה ממש, ו־$\frac{1}{t}$ יורדת ממש עבור $t > 0$; לכן y יורדת ממש בתחומה ובפרט חד־חד־ערכית.

ד. כן. נחלץ את x: מ־$y^6 = \frac{1}{x^5 - 2}$ נקבל $x^5 = 2 + y^{-6}$, ולכן

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{2 + \frac{1}{x^6}}$$

עבור $x > 0$.

תשובה: תחום $(\sqrt[5]{2}, \infty)$, תמונה $(0, \infty)$, חח"ע; $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{2 + x^{-6}}$, $x > 0$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

משפט ערך הביניים: אם g רציפה ב־$[a,b]$ ו־$g(a)<0<g(b)$ (או להפך), אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$g(c)=0$.

נגדיר $g(x)=C+x+\arctan x$, רציפה בכל $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות רציפות.

כי $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$: עבור $a=-|C|-2$ מתקיים

$$g(a)<C-|C|-2+\frac{\pi}{2}<0,$$

ועבור $b=|C|+2$ מתקיים

$$g(b)>C+|C|+2-\frac{\pi}{2}>0.$$

לפי משפט ערך הביניים קיים $c\in(a,b)$ עם $g(c)=0$, כלומר למשוואה יש פתרון. (בנוסף $g'(x)=1+\frac{1}{1+x^2}>0$, כך שהפתרון אף יחיד.)

תשובה: קיים פתרון (ואף יחיד) לפי משפט ערך הביניים.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נציב $t=\frac{1}{x}$; כאשר $x\to\infty$ מתקיים $t\to0^+$.

הגבול הופך לביטוי

$$\lim_{t\to0^+}\frac{2^t-1}{t},$$

שהוא הגבול היסודי $\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t}=\ln a$.

לכן הגבול שווה $\ln 2$.

תשובה: $\ln 2$

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

לפי ההגדרה, $\lim a_n=0$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש־$|a_n|<\varepsilon$ לכל $n>N$.

ניקח $\varepsilon=\frac{1}{4}$. בסדרה יש אינסוף איברים השווים ל־$\frac{1}{2}$, ולכן לכל N קיים $n>N$ עם $|a_n|=\frac{1}{2}\geq\varepsilon$.

לכן הגבול אינו 0. (למעשה לסדרה שני גבולות חלקיים, 0 ו־$\frac{1}{2}$, ולכן אין לה גבול כלל; העובדה שהאיברים נמצאים ב־$(-1,1)$ אינה מספיקה.)

תשובה: עבור $\varepsilon=\frac{1}{4}$ יש אינסוף איברים $a_n=\frac{1}{2}$ מחוץ לסביבה $(-\varepsilon,\varepsilon)$.

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק כל נקודה בנפרד. בנקודה $x=1$ מתקיים $f(1)=e^{a}$, וזה גם הגבול מימין, כי e^{ax} רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות.

הגבול משמאל הוא מהצורה 1^{∞}, ולכן נעבור ללוגריתם:

$$\ln\left[(2-x^2)^{\frac{2}{x-1}}\right]=\frac{2\ln(1+(1-x^2))}{x-1}.$$

כי $\ln(1+u)\sim u$ כאשר $u\to 0$: הביטוי שקול לביטוי

$$\frac{2(1-x^2)}{x-1}=-2(1+x)\to -4.$$

לכן הגבול משמאל הוא e^{-4}, ונדרש $e^{a}=e^{-4}$, כלומר $a=-4$.

בנקודה $x=-1$:

$$f(-1)=(2-1)^{\frac{2}{-2}}=1,$$

וזה גם הגבול מימין, כי $(2-x^2)^{\frac{2}{x-1}}$ רציפה בסביבת -1 כהרכבה של פונקציות רציפות (הבסיס חיובי שם).

הגבול משמאל מתקבל בהצבה, מרציפות הלוגריתם בתחום הגדרתו: $\log_2(b-3)$. נדרש $\log_2(b-3)=1$, כלומר $b=5$.

תשובה: $a=-4,\ b=5$

תשפ"ב · סמסטר א' · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 16

שאלה 1א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$. נפרק את המכנה:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

נסמן $g(x)=\sqrt[3]{10-x}$; אז $g(2)=2$ ולכן

$$\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}\to g'(2)=-\frac{1}{3(10-2)^{2/3}}=-\frac{1}{12}.$$

לכן, מרציפות $\frac{1}{x+1}$ בנקודה 2, מתקיים

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}\cdot\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}.$$

תשובה: $-\frac{1}{36}$ (תשובה ב)

שאלה 1ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב כל סדרה בנפרד בעזרת מחזוריות הסינוס. הסדרה

$$b_n = a_{6n} = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

– לא מתכנסת.

הסדרה

$$c_n = (a_{3n+3})^2 = \sin^2\left(\frac{\pi n}{2} + \pi\right) = \sin^2\frac{\pi n}{2},$$

שמקבלת לסירוגין את הערכים $1, 0$ – לא מתכנסת.

הסדרה

$$d_n = a_{6n+3} = \sin(\pi(n+1)) = 0$$

לכל n – מתכנסת ל־0.

הסדרה

$$f_n = a_{12n} = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

לכל n – מתכנסת ל־1.

תשובה: ג ו־ד בלבד

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

עבור $x \neq 5$ הפונקציה היא מנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס, ולכן רציפה שם.

בנקודה $x = 5$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{e^x - e^5}{x-5}$$

הוא הנגזרת של e^x ב־5, כלומר e^5.

מכיוון ש־$f(5) = 25 \neq e^5$, f אינה רציפה ב־5, ולכן א שגויה. גם ב שגויה (הגבול e^5 ולא 25), וגם ג שגויה ($e^5 \neq e$).

לכן התשובה הנכונה היא ד.

תשובה: ד – אף אחת מהתשובות א–ג אינה נכונה (הגבול הוא e^5).

שאלה 3א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

לכל x מתקיים

$$-1 \le \cos(x^2+5) \le 1,$$

שזה תחום ההגדרה של arcsin; לכן f מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ (א נכונה).

הפונקציה f היא הרכבה של פונקציות רציפות ($\cos(x^2+5)$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ וערכיה ב־$[-1,1]$, שבו arcsin רציפה), ולכן רציפה בכל $\mathbb{R}$ (ב נכונה), ובפרט אין לה נקודות אי־רציפות (ג שגויה).

ערכי arcsin נמצאים ב־$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ולכן f חסומה (ד נכונה).

תשובה: א, ב, ד

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הפונקציה $\arcsin$ גזירה ב־$(-1,1)$ בלבד, לכן לפי כלל השרשרת f גזירה בוודאות כאשר $\cos(x^2+5) \neq \pm 1$, כלומר $\sin(x^2+5) \neq 0$.

שם:

$$f'(x) = \frac{-2x\sin(x^2+5)}{\sqrt{1-\cos^2(x^2+5)}} = \frac{-2x\sin(x^2+5)}{|\sin(x^2+5)|} = -2x\ \operatorname{sign}\left(\sin(x^2+5)\right).$$

מתקיים $\sin(x^2+5)=0$ כאשר $x^2+5 = k\pi$, כלומר $x = \pm\sqrt{k\pi-5}$ עם $k \geq 2$ שלם (כי $x^2+5 \geq 5 > \pi$). בנקודות אלה $x \neq 0$.

בנקודה כזו $\operatorname{sign}(\sin(x^2+5))$ מחליף סימן (כי x^2+5 מונוטונית ממש בסביבה), ולכן הנגזרות החד־צדדיות הן $\mp 2x_0 \neq 0$ – שונות, ו־f אינה גזירה שם.

תשובה: f גזירה בכל $x \neq \pm\sqrt{k\pi-5}$ ($k \geq 2$ שלם), ושם $f'(x) = -2x\,\frac{\sin(x^2+5)}{|\sin(x^2+5)|}$.

תש"פ · סמסטר א׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **18**

שאלה 1

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק כל ענף בנפרד. על $[0,\infty)$ הפונקציה $2e^x$ רציפה (כפולה של האקספוננט) ועולה ממש, ותמונתה $[2,\infty)$. על $(-\infty,0)$ הפונקציה $x+2$ רציפה (פולינום) ועולה ממש, ותמונתה $(-\infty,2)$.

שתי התמונות זרות ואיחודן $\mathbb{R}$. לכן f חח"ע (ערכים מאותו ענף שונים כי הענף עולה ממש, וערכים מענפים שונים שונים כי התמונות זרות) ועל $\mathbb{R}$, כלומר הפיכה.

עבור $y \geq 2$:

$$y = 2e^x \iff x = \ln\frac{y}{2} \geq 0.$$

עבור $y < 2$:

$$y = x+2 \iff x = y-2 < 0.$$

נגדיר $g(y) = \ln\frac{y}{2}$ ל־$y \geq 2$ ו־$g(y) = y-2$ ל־$y<2$. בדיקה ישירה מראה $f(g(y)) = y$ לכל y ו־$g(f(x)) = x$ לכל x, ולכן $g = f^{-1}$.

תשובה: הפיכה; $f^{-1}(y) = \ln\frac{y}{2}$ עבור $y \geq 2$, ו־$f^{-1}(y) = y-2$ עבור $y<2$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(i) לא נכון: הסדרה $a_n = (-1)^n$ חסומה אך אינה מונוטונית.

(ii) נכון: נניח בה"כ ש־a_n עולה ומחזורית עם מחזור k. אז

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k+1} = a_1,$$

ולכן $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$, ובשל המחזוריות הסדרה קבועה.

סדרה קבועה מתכנסת, ולכן הטענה נכונה (גם עבור סדרה יורדת הטיעון זהה).

תשובה: (i) לא נכון; (ii) נכון.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בזהויות $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ ו־$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ עם $\theta=\frac{1}{n}$.

מקבלים

$$\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$$

(זהות חצי הזווית).

לכן הביטוי שווה ל־$\tan\frac{1}{2n}$. הפונקציה $\tan$ רציפה ב־$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ולכן הגבול הוא $\tan 0=0$.

תשובה: 0

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נכתוב $\log_4(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln 4}$, ולכן ניתן לכתוב את הביטוי בצורה

$$\frac{\ln 4}{3}\cdot\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}.$$

מהגבולות היסודיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\ln 2$$

וכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

לכן הגבול הוא

$$\frac{\ln 4}{3}\cdot\ln 2=\frac{2(\ln 2)^2}{3}.$$

תשובה: $\frac{2(\ln 2)^2}{3}$

תשע״ט · סמסטר ב׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 19

שאלה 1

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נניח בשלילה ש־$r = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ רציונלי; ברור ש־$r > 0$.

אז $\sqrt{5} = r - \sqrt{3}$, ובהעלאה בריבוע:

$$5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3,$$

כלומר

$$\sqrt{3} = \frac{r^2 - 2}{2r},$$

מספר רציונלי.

אבל $\sqrt{3}$ אי־רציונלי: אם $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ בשבר מצומצם, אז $p^2 = 3q^2$, לכן $3 \mid p$; נכתוב $p = 3k$ ונקבל $q^2 = 3k^2$, לכן גם $3 \mid q$ — בסתירה לצמצום.

הסתירה מראה ש־$\sqrt{3} + \sqrt{5}$ אינו רציונלי.

תשובה: אילו היה רציונלי, היה נובע ש־$\sqrt{3} = \frac{r^2-2}{2r}$ רציונלי — סתירה.

שאלה 2

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהסדרה חסומה ומונוטונית. חסם: נוכיח באינדוקציה ש־$0 < a_n < 3$. עבור $n = 1$, $a_1 = \sqrt{6} < 3$; אם $a_n < 3$ אז

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{9} = 3.$$

מונוטוניות: מתקיים

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 6 + a_n - a_n^2 = (3 - a_n)(2 + a_n) > 0,$$

ומכיוון שהאיברים חיוביים, $a_{n+1} > a_n$.

הסדרה עולה וחסומה מלעיל, לכן מתכנסת לגבול L עם $\sqrt{6} \le L \le 3$.

נעבור לגבול בנוסחת הנסיגה; מרציפות פונקציית השורש ב־$[0, \infty)$ נקבל

$$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0 \Rightarrow L = 3$$

או $L = -2$; מכיוון ש־$L > 0$, $L = 3$.

תשובה: $\lim a_n = 3$

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחסום את המונה:

$$|\sin x \cdot \arctan x| \le 1 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

לכן

$$\left|\frac{\sin x \arctan x}{x^2}\right| \le \frac{\pi}{2x^2} \to 0.$$

לפי כלל הסנדוויץ׳ (חסומה כפול שואפת לאפס) הגבול הוא 0.

תשובה: 0

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של 1^{∞}, ולכן נכתוב

$$(\cos x)^{1/x^2} = \left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

כאשר $x \to 0$: $\cos x - 1 \to 0$, ולכן הבסיס שואף ל־e (גבול יסודי $(1+t)^{1/t} \to e$).

נחשב את גבול המעריך:

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \to -\frac{1}{2}.$$

לכן, מרציפות פונקציות האקספוננט והלוגריתם בתחומי ההגדרה שלהן, הגבול הוא $e^{-1/2}$.

תשובה: $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט ערך הביניים פעמיים. נגדיר $g(x) = 10x^{2018} - 2019x - 1$, פולינום ולכן רציף על $\mathbb{R}$. פתרונות המשוואה הם אפסי g.

מתקיים $g(-1) = 10 + 2019 - 1 = 2028 > 0$ ו־$g(0) = -1 < 0$: לפי משפט ערך הביניים יש שורש ב־$(-1, 0)$.

מתקיים $g(1) = 10 - 2019 - 1 = -2010 < 0$ ו־$g(2) = 10 \cdot 2^{2018} - 4039 > 0$: יש שורש נוסף ב־$(1, 2)$.

הקטעים זרים, ולכן יש לפחות שני פתרונות שונים.

תשובה: שורש ב־$(-1, 0)$ ושורש ב־$(1, 2)$ לפי משפט ערך הביניים.

תשע"ט · סמסטר א׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 20

שאלה 1ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא לכל ε מתאים δ לפי ההגדרה. יהי $\varepsilon > 0$. נחשב:

$$|(2x+1) - 7| = |2x - 6| = 2|x - 3|.$$

נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

אז לכל x עם $0 < |x - 3| < \delta$ מתקיים

$$|(2x+1) - 7| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon,$$

כנדרש.

תשובה: $\delta = \varepsilon/2$ מתאים.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחסום את הסכום מלמטה. בסכום יש n מחוברים, והקטן שבהם הוא האחרון: לכל $1 \le k \le n$ מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

לכן

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \ge n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

מכיוון ש־$\sqrt{n} \to \infty$, לפי מבחן ההשוואה לגבולות אינסופיים גם הסכום שואף ל־∞.

תשובה: ∞

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט ערך הביניים. הפונקציה f רציפה ב־$[0,\pi)$ כסכום של פונקציות רציפות שם.

בקצה הימני מתקיים $f(\pi) = \frac{1}{\pi} + 0 < 10$.

מתקיים $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ (כי $\frac{1}{x} \to \infty$ ו־$\sin x$ חסומה), ולכן קיימת $a \in (0,\pi)$ עם $f(a) > 10$. למשל $f(0.05) \ge 20 - 1 = 19 > 10$.

לפי משפט ערך הביניים על $[a,\pi]$ קיימת $c \in (a,\pi) \subset (0,\pi]$ כך ש־$f(c) = 10$.

תשובה: הוכחה לפי משפט ערך הביניים בקטע $[a,\pi]$ עם $f(a) > 10 > f(\pi)$.

תשע״ח · סמסטר ב׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 21

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

תחום ההגדרה של $y=\ln(1+\sqrt{x})$ הוא $x\geq 0$. הפונקציה עולה ממש (הרכבה של פונקציות עולות), ולכן חח״ע.

הפונקציה רציפה ב־$[0,\infty)$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן כאשר x עובר על $[0,\infty)$, $1+\sqrt{x}$ עובר על $[1,\infty)$ ולכן y עובר על $[0,\infty)$. זו התמונה, ולכן תחום ההגדרה של ההפוכה.

נחלץ:

$$e^y=1+\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}=e^y-1\Rightarrow x=(e^y-1)^2$$

(כאשר $e^y-1\geq 0$, כלומר $y\geq 0$).

לכן

$$f^{-1}(x)=(e^x-1)^2$$

עם תחום הגדרה $[0,\infty)$.

תשובה: $f^{-1}(x)=(e^x-1)^2,\ x\geq 0$.

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהסדרה מונוטונית וחסומה. חסימות: נוכיח באינדוקציה ש־$0\leq a_n<3$. מתקיים $a_1=0$. אם $0\leq a_n<3$ אז

$$a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}<\sqrt{9}=3$$

וגם $a_{n+1}\geq 0$.

מונוטוניות:

$$a_{n+1}>a_n\iff 3+2a_n>a_n^2\iff (a_n-3)(a_n+1)<0,$$

וזה מתקיים כי $0\leq a_n<3$. לכן הסדרה עולה ממש.

סדרה עולה וחסומה מלעיל מתכנסת; נסמן $L=\lim a_n$, ו־$0\leq L\leq 3$.

נעבור לגבול בנוסחת הנסיגה (מרציפות השורש ב־$[0,\infty)$):

$$L=\sqrt{3+2L}\Rightarrow L^2-2L-3=0\Rightarrow L=3$$

או $L=-1$. מכיוון ש־$L\geq 0$, $L=3$.

תשובה: $\lim a_n=3$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זה גבול מהצורה 1^∞. נכתוב

$$\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}=e^{-\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 3x}}.$$

נחשב:

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 3x}=\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}\to 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$ הגבול הוא $e^{-1/3}$.

תשובה: $e^{-1/3}$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נכפול ונחלק בצמוד:

$$\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-5x}=\frac{10x}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-5x}}.$$

עבור $x<0$ מתקיים $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, ולכן המכנה הוא $-x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right)$.

לכן, מרציפות השורש ב־$[0,\infty)$, הביטוי שווה

$$\frac{10x}{-x\left(\sqrt{1+5/x}+\sqrt{1-5/x}\right)}=\frac{-10}{\sqrt{1+5/x}+\sqrt{1-5/x}}\to\frac{-10}{2}=-5.$$

תשובה: -5

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הגבול מהצורה $\frac{0}{0}$, והמונה והמכנה רציפים ב־$\mathbb{R}$ כהפרש והרכבה של פונקציות רציפות, ולכן נשתמש בכלל לופיטל.

לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to0}\frac{2kxe^{kx^2}+\sin x}{4x^3}.$$

המונה מקיים $\frac{2kxe^{kx^2}+\sin x}{x}\to 2k+1$, ולכן אם $2k+1\neq0$ הביטוי מתנהג כמו $\frac{2k+1}{4x^2}$ והגבול אינסופי.

לכן חייב $k=-\frac{1}{2}$. אז הגבול הוא $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-xe^{-x^2/2}}{4x^3}$.

לופיטל שוב:

$$\lim\frac{\cos x-e^{-x^2/2}+x^2e^{-x^2/2}}{12x^2},$$

ושוב:

$$\lim\frac{-\sin x+3xe^{-x^2/2}-x^3e^{-x^2/2}}{24x}=\frac{-1+3}{24}=\frac{1}{12}.$$

בדיקה בטיילור:

$$e^{-x^2/2}-\cos x=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+o(x^4)=\frac{x^4}{12}+o(x^4).$$

תשובה: $k=-\frac{1}{2}$, הגבול $\frac{1}{12}$.

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק רציפות וגזירות ב־0 לפי ההגדרה. נניח $p>0$ (אז $\frac{1}{x^p}$ לא חסום ליד 0 ו־$\sin\frac{1}{x^p}$ מקבל כל ערך ב־$[-1,1]$ בכל סביבה של 0).

רציפות: אם $m>0$, אז

$$|f(x)|\le |x|^m \to 0 = f(0)$$

ולכן f רציפה ב־0. אם $m=0$, $\sin\frac{1}{x^p}$ אין לו גבול; אם $m<0$, לאורך נקודות שבהן $\sin\frac{1}{x^p}=1$ הערך שואף לאינסוף. לכן רציפה $\iff m>0$.

גזירות: נחשב את מנת ההפרשים

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = h^{m-1}\sin\frac{1}{h^p}.$$

אם $m>1$ הביטוי חסום ע"י $|h|^{m-1}\to 0$, ולכן $f'(0)=0$. אם $m\le 1$ אין לו גבול (מתנודד בין ± 1 או לא חסום).

מסקנה: רציפה ב־0 בדיוק כאשר $m>0$, וגזירה ב־0 בדיוק כאשר $m>1$ (ואז $f'(0)=0$). אם m,p טבעיים: רציפה עבור $m\ge 1$ וגזירה עבור $m\ge 2$.

תשובה: עבור $p>0$: רציפה $\iff m>0$; גזירה $\iff m>1$, ואז $f'(0)=0$.

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נעביר אגפים ונראה בעזרת משפט ערך הביניים שלפונקציית ההפרש יש אפס בקטע. נגדיר

$$g(x)=(1+x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-8x\tan x=(1+x)\cos x-8x\tan x.$$

הפונקציה g רציפה ב־$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ כהפרש של מכפלות של פונקציות רציפות ($\tan x$ רציפה שם, כי $\cos x\neq 0$).

בקצה השמאלי מתקיים $g(0)=1>0$.

בקצה הימני מתקיים

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-8\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-2\pi<2-2\pi<0.$$

לפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ עם $g(c)=0$, כלומר פתרון של המשוואה.

תשובה: נובע ממשפט ערך הביניים עבור $g(x)=(1+x)\cos x-8x\tan x$.

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב לפי הגדרת הנגזרת, עבור $x>1$:

$$y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x-1+h)-\ln(x-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x-1}\right)}{h}.$$

נסמן $t=\frac{h}{x-1}\to 0$: הביטוי הוא

$$\frac{1}{x-1}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}.$$

מאחר ש־$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$, מתקבל

$$y'(x)=\frac{1}{x-1}.$$

תשובה: $y'=\frac{1}{x-1}$, $x>1$.

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 23

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נציב $t=\frac{1}{x}\to 0^+$. הגבול הוא

$$\lim_{t\to 0^+}(\sin t+\cos t)^{1/t},$$

מהצורה 1^∞.

נסמן $u(t)=\sin t+\cos t-1\to 0$. אז

$$(1+u)^{1/t}=\left[(1+u)^{1/u}\right]^{u/t},$$

ו־$(1+u)^{1/u}\to e$.

נחשב

$$\frac{u}{t}=\frac{\sin t}{t}-\frac{1-\cos t}{t}=\frac{\sin t}{t}-\frac{2\sin^2(t/2)}{t}\to 1-0=1$$

(כי $\frac{2\sin^2(t/2)}{t}=\frac{\sin(t/2)}{t/2}\cdot\sin\frac{t}{2}\to 1\cdot 0$).

לכן, מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$ ומרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, הגבול שווה $e^1=e$.

תשובה: e

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

מהזוגיות: $f(-x)=f(x)$ לכל x.

נגזור את שני האגפים לפי x, עם כלל השרשרת באגף שמאל: $-f'(-x)=f'(x)$.

כלומר $f'(-x)=-f'(x)$ לכל x, ולכן f' בהכרח אי־זוגית (למשל $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$).

אפשר גם לפי ההגדרה:

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=-f'(x).$$

תשובה: הנגזרת בהכרח אי־זוגית.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

עבור $x\neq 0$ הפונקציה $|x|$ גזירה (נגזרתה $\operatorname{sgn}x$), ולכן f גזירה שם כהרכבה ומכפלה של פונקציות גזירות.

לפי כללי הגזירה, עבור $x\neq 0$:

$$f'(x)=2x\sin(\pi\sin|x|)+x^2\cos(\pi\sin|x|)\cdot\pi\cos|x|\cdot\operatorname{sgn}x=2x\sin(\pi\sin|x|)+\pi x|x|\cos x\cos(\pi\sin|x|).$$

בנקודה $x=0$ נשתמש בהגדרה:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=h\sin(\pi\sin|h|).$$

מכיוון ש־$|h\sin(\pi\sin|h|)|\le|h|\to 0$, מתקיים $f'(0)=0$.

לכן f גזירה בכל $\mathbb{R}$.

תשובה: f גזירה לכל x; $f'(0)=0$ ועבור $x\neq 0$: $f'(x)=2x\sin(\pi\sin|x|)+\pi x|x|\cos x\cos(\pi\sin|x|)$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק כל ענף בנפרד. על $(-\infty, 0]$: $f(x) = 1 - 2x$ יורדת ממש, ותמונתה $[1, \infty)$. על $(0, \infty)$: $f(x) = 1 - x^2$ יורדת ממש, ותמונתה $(-\infty, 1)$.

שתי התמונות זרות ואיחודן $\mathbb{R}$, ולכן f חח"ע ועל, כלומר הפיכה (למעשה יורדת ממש בכל $\mathbb{R}$).

עבור $y \geq 1$: $y = 1 - 2x$ עם $x \leq 0$ נותן $x = \frac{1-y}{2}$. עבור $y < 1$: $y = 1 - x^2$ עם $x > 0$ נותן $x = \sqrt{1-y}$.

לכן

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1-y}{2}, & y \geq 1 \\ \sqrt{1-y}, & y < 1 \end{cases}$$

בדיקה: לכל $y \geq 1$, $\frac{1-y}{2} \leq 0$ ו־$f\left(\frac{1-y}{2}\right) = 1 - (1-y) = y$; לכל $y < 1$, $\sqrt{1-y} > 0$ ו־$f(\sqrt{1-y}) = 1 - (1-y) = y$.

כלומר $f(f^{-1}(y)) = y$ לכל y, ומכיוון ש־f חח"ע זו ההופכית.

תשובה: כן. $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$ עבור $y \geq 1$ ו־$f^{-1}(y) = \sqrt{1-y}$ עבור $y < 1$.

תשע"ז · סמסטר ב' · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 24

שאלה 1א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא N כך שלכל $n > N$:

$$\left| \frac{10n}{n^2+1} - 0 \right| < \epsilon.$$

לכל $n \geq 1$:

$$\frac{10n}{n^2+1} < \frac{10n}{n^2} = \frac{10}{n}.$$

נבחר $N = \frac{10}{\epsilon}$. אז לכל $n > N$:

$$\frac{10n}{n^2+1} < \frac{10}{n} < \frac{10}{N} = \epsilon.$$

תשובה: $N = \frac{10}{\epsilon}$ מתאים.

שאלה 1ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בכלל הסנדוויץ'. מתקיים

$$2017^n \leq 2016^n + 2017^n \leq 2 \cdot 2017^n.$$

לכן

$$2017 \leq \sqrt[n]{2016^n + 2017^n} \leq 2017\sqrt[n]{2}.$$

מתקיים $\sqrt[n]{2} \to 1$, ולפי כלל הסנדוויץ' הגבול הוא 2017.

תשובה: 2017

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נכתוב את הבסיס בצורה

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2}.$$

זו צורה 1^∞, ולכן אין שימוש מיידי בחשבון גבולות.

נכתוב

$$\left(1+\frac{2x+4}{(x+1)^2}\right)^{-x} = \left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{-x\alpha}$$

עם $\alpha = \frac{2x+4}{(x+1)^2} \to 0$.

מתקיים $(1+\alpha)^{1/\alpha} \to e$ וכן

$$-x\alpha = -\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} \to -2.$$

לכן, מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$ ומרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, הגבול e^{-2}.

תשובה: e^{-2}

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחלק מונה ומכנה ב־x (עבור $x>0$):

$$\frac{\sqrt{1-\frac{\cos x}{x}-\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}}.$$

מתקיים $\frac{\cos x}{x} \to 0$ ו־$\frac{\sin x}{x} \to 0$ (חסומה כפול שואפת לאפס).

לכן, מרציפות פונקציית השורש ב־$[0,\infty)$, הגבול $\frac{\sqrt{1}}{1} = 1$.

תשובה: 1

שאלה 3

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק רציפות מימין ומשמאל לנקודה. גבול מימין:

$$\ln f(x) = \frac{c}{x}\ln\frac{1-x}{1+x} = c\cdot\frac{\ln(1-x)-\ln(1+x)}{x} \to c(-1-1) = -2c.$$

לכן, מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-2c}$, ורציפות מימין דורשת $-2c = 2$, כלומר $c=-1$.

גבול משמאל:

$$\ln f(x) = \frac{b\ln(x+a)}{x}.$$

אם $a \neq 1$ אז $\ln(x+a) \to \ln a \neq 0$ (מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$): עבור $b \neq 0$ הביטוי שואף ל־$\pm\infty$ (הגבול 0 או ∞), ועבור $b=0$ הגבול 1. בשני המקרים אינו e^2.

לכן $a=1$, ואז $\frac{b\ln(1+x)}{x} \to b$, כלומר, שוב מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^b$. רציפות משמאל דורשת $b=2$.

מסקנה: f רציפה ב־0 בדיוק עבור $a=1,\ b=2,\ c=-1$.

תשובה: $a=1,\ b=2,\ c=-1$

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נגזור כל מחובר בנפרד. הנגזרת של המחובר הראשון היא

$$\left(\arctan\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{1}{1+(x^2-1)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

הנגזרת של המחובר השני היא

$$\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}-\ln x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}.$$

נחסר ונקבל

$$f'(x) = \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}.$$

תשובה: $f'(x) = \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \frac{e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x\left(\sqrt{1+e^{2x}}+e^x\right)}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)}.$$

לאחר צמצום:

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

תשובה: $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

שאלה 4ג

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הפונקציה מוגדרת עבור $x>1$. נוציא לוגריתם:

$$\ln f(x) = x\ln(\ln x) - (\ln x)^2.$$

גזירה:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\ln x) + x\cdot\frac{1}{x\ln x} - \frac{2\ln x}{x} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}.$$

לכן

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}\right).$$

תשובה: $f'(x) = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$

תשע"ו · סמסטר א׳ · בוחן

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 26

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחסום את הסכום a_n ונשתמש בכלל הסנדוויץ'. בסכום יש n מחוברים, והגדול מביניהם הוא הראשון והקטן הוא האחרון.

לכן

$$\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+1}}.$$

נחלק מונה ומכנה ב־n:

$$\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8+1/n^2}} \to \frac{1}{2}$$

ובאופן דומה

$$\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8+1/n^3}} \to \frac{1}{2}$$

(מרציפות השורש השלישי ב־$\mathbb{R}$).

לפי כלל הסנדוויץ' $\lim a_n = \frac{1}{2}$.

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במבחן המנה לסדרות:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

מתקיים

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1},$$

ולכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2}{e} < 1$.

סדרה חיובית שבה גבול המנה קטן מ־1 שואפת ל־0.

תשובה: 0

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$. נסמן $t = x^2 - 9 \to 0$ ונכתוב

$$\frac{e^{x^2-9}-1}{x^2+x-12} = \frac{e^t-1}{t} \cdot \frac{x^2-9}{x^2+x-12}.$$

הגבול היסודי נותן $\frac{e^t-1}{t} \to 1$.

בנוסף

$$\frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x+3}{x+4} \to \frac{6}{7},$$

כי $\frac{x+3}{x+4}$ רציפה בסביבת $x=3$ כמנה של פולינומים שהמכנה שלה אינו מתאפס שם.

תשובה: $\frac{6}{7}$

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא את התנאים שמטיל כל חלק בביטוי. הלוגריתם $\log_2 x$ מוגדר עבור $x > 0$, ו־$\arcsin$ דורש $-1 \le \log_2 x \le 1$, כלומר $\frac{1}{2} \le x \le 2$.

השורש דורש $\sin 2x \ge 0$, כלומר $k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi$ עבור k שלם. המכנה $\sqrt{\sin 2x} + 1 \ge 1$ לעולם אינו מתאפס.

החיתוך עם $[\frac{1}{2}, 2]$: עבור $k=0$ מתקבל $[0, \frac{\pi}{2}]$, ו־$2 < \frac{\pi}{2} \approx 1.57$; עבור $k=1$ הקטע $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ נמצא מחוץ ל־$[\frac{1}{2}, 2]$.

לכן

$$D = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

תשובה: $\left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט ערך הביניים. הפונקציה f רציפה בקטע $[1, e]$ כהרכבה של פונקציות אלמנטריות.

מתקיים $f(1) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$ ו־$f(e) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$.

לפי משפט ערך הביניים קיים $c \in (1, e)$ עם $f(c) = 0$.

(ובאופן מפורש: עם $t = \ln x \in [0, 1]$ המשוואה היא $t^2 + t - 1 = 0$, ולכן $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ו־$x = e^{(\sqrt{5}-1)/2}$, שורש יחיד בקטע.)

תשובה: כן, יש שורש אחד: $x = e^{(\sqrt{5}-1)/2}$.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x+7| < \delta$ אז $\big||3x+20|-1\big| < \epsilon$.

מאי־שוויון המשולש ההפוך $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$ עם $a = 3x+20$, $b = -1$:

$$\big||3x+20|-1\big| \le |3x+20+1| = 3|x+7|.$$

נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{3}$. אז לכל $0 < |x+7| < \delta$:

$$\big||3x+20|-1\big| \le 3|x+7| < 3\delta = \epsilon.$$

לכן לפי ההגדרה

$$\lim_{x\to -7} |3x+20| = 1.$$

תשובה: $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

תשפ"ו · סמסטר ב' · מועד ב'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 27

שאלה 1 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

זהו מקרה של 0^0, ולכן נכתוב $x^x = e^{x\ln x}$.

לפי לופיטל

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

מאחר שפונקציית האקספוננט רציפה ב־$\mathbb{R}$, נקבל $x^x \to e^0 = 1$.

תשובה: תשובה ג: 1.

שאלה 2 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נכפול ונחלק בצמוד:

$$a_n = \frac{n\left(\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1} = \frac{4+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}.$$

המונה שואף ל־4 והמכנה שואף ל־2, ולכן $a_n \to 2$.

תשובה: תשובה ג: 2.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

הפונקציה f רציפה ב־$[1,5]$ וגזירה ב־$(1,5)$ לפי הנתון, ולכן לפי משפט לגרנז׳ קיים $c \in (1,5)$ עם

$$f(5) - f(1) = 4f'(c) < 12,$$

ולכן $f(5) < 14$.

כל ערך הקטן מ־14 אפשרי, למשל $f(x) = 2 + k(x-1)$ עם $k < 3$ מתאים: $k = \frac{11}{4}, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{19}{4}$ נותנים $13, 10, 0, -17$.

לכן הערך 14 אינו אפשרי.

תשובה: תשובה ב: 14.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

חילוק פולינומים:

$$\frac{x^4+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}.$$

לכן

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x + 2\arctan x + C,$$

ומ־$F(0) = \frac{2}{3}$ נקבל $C = \frac{2}{3}$.

לבסוף,

$$F(1) = \frac{1}{3} - 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

תשובה: תשובה ג: $F(1) = \frac{\pi}{2}$.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נשתמש במשפט ויירשטראס: f רציפה בקטע הסגור $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ כסכום של פונקציות רציפות שם (המכנה x אינו מתאפס בקטע), ולכן מקבלת בו מינימום ומקסימום.

הנגזרת $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ מתאפסת בקטע רק ב־$x = 1$; f יורדת ב־$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ועולה ב־$[1,3]$.

לכן $m = f(1) = 2$, והמקסימום בקצוות: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$, $f(3) = \frac{10}{3}$, כלומר $M = \frac{10}{3}$.

מכאן

$$M - m = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}.$$

תשובה: תשובה א: $M - m = \frac{4}{3}$.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נסמן $t = x^2$. מתקיים

$$e^t \cos t = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}\right)\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) + o(t^4).$$

המקדם של t^4:

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{6}.$$

לכן המקדם של x^8 בפולינום מקלורן של f הוא $-\frac{1}{6}$.

מכאן $\frac{f^{(8)}(0)}{8!} = -\frac{1}{6}$, כלומר

$$f^{(8)}(0) = -\frac{8!}{6}.$$

תשובה: תשובה ב: $-\frac{8!}{6}$.

שאלה 7א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

אינטגרציה בחלקים עם $u = x^2$, $v' = \sin 3x$:

$$\int x^2 \sin 3x\, dx = -\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\, dx.$$

שוב בחלקים:

$$\int x\cos 3x\, dx = \frac{x\sin 3x}{3} - \frac{1}{3}\int \sin 3x\, dx = \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9}.$$

לכן

$$\int x^2 \sin 3x\, dx = -\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2x\sin 3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27} + C.$$

תשובה: $-\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2x\sin 3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27} + C$

שאלה 7ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נגדיר $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) - x\ln x$ עבור $x \geq 1$. אז $g(1) = 0$.

נגזור: $g'(x) = x - \ln x - 1$, ו־$g''(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ עבור $x \geq 1$, לכן g' עולה ו־$g'(x) \geq g'(1) = 0$.

מכאן g עולה ב־$[1,\infty)$, ולכן $g(x) \geq g(1) = 0$, כלומר $x\ln x \leq \frac{1}{2}(x^2-1)$.

תשובה: נובע ממונוטוניות של $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) - x\ln x$.

שאלה 8א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפולינום מקלורן של $f(x)=\ln(1+x)$ ב־$x=0.2$:

$$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

נחשב את הנגזרות: $f^{(n+1)}(t)=\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$, ולכן לפי לגרנז׳ קיים $0<c<0.2$ עם

$$|R_n(0.2)|=\frac{n!}{(1+c)^{n+1}}\cdot\frac{0.2^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{0.2^{n+1}}{n+1}.$$

עבור $n=3$:

$$\frac{0.2^4}{4}=0.0004,$$

לא מספיק. עבור $n=4$:

$$\frac{0.2^5}{5}=0.000064<10^{-4}.$$

לכן

$$\ln(1.2)\approx P_4(0.2)=0.2-\frac{0.04}{2}+\frac{0.008}{3}-\frac{0.0016}{4}=\frac{1367}{7500}\approx 0.18227.$$

תשובה: $\ln 1.2\approx 0.2-0.02+\frac{0.008}{3}-0.0004=\frac{1367}{7500}\approx 0.18227$

שאלה 8ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

גזירות גוררת רציפות, ולכן נתחיל בתנאי הרציפות. נשתמש בפיתוח $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

מצד שני $f(0)=a$, לכן $a=-\frac{1}{2}$.

הנגזרת משמאל: $f'_-(0)=b$.

הנגזרת מימין:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

גזירות דורשת $b=\frac{1}{3}$.

תשובה: $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}$

שאלה 9א

נבדק על ידי צוות הקורס

חסימות: נוכיח באינדוקציה $0<a_n<2$. בסיס: $a_1=\sqrt{2}<2$, ואם $0<a_n<2$ אז $0<a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<\sqrt{4}=2$.

מונוטוניות: $a_n=\sqrt{a_n\cdot a_n}$, כי $0<a_n<2$, לכן הסדרה עולה.

סדרה עולה וחסומה מלעיל מתכנסת; נסמן $L=\lim a_n$. מתקיים $a_{n+1}^2=2a_n$. לפי אריתמטיקה של גבולות אגף שמאל שואף ל־L^2 ואגף ימין שואף ל־$2L$, ומיחידות הגבול $L^2=2L$, כלומר $L=0$ או $L=2$.

מאחר ש־$0<a_1=\sqrt{2}\le L$, מתקיים $L=2$.

תשובה: $\lim a_n=2$

שאלה 29ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הטענה אינה נכונה. ניקח $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ו־$g(x)=x$.

אז $f(x)\to 0$ ו־$f(x)g(x)=\frac{1}{x}\to 0$ כאשר $x\to\infty$, אבל $g(x)=x$ אינה חסומה ב־$(0,\infty)$.

תשובה: לא נכון (למשל $f=\frac{1}{x^2},\ g=x$).

תשפ"ו · סמסטר ב' · מועד א'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 30

שאלה 1

פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ב.

$a_n=n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.

מאחר ש־$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\to e^2$ ו־$\ln$ רציפה, $a_n\to\ln e^2=2$.

תשובה: תשובה ב: 2.

שאלה 2

פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ה.

(א) לא בהכרח: $f(x)=\frac{1}{x-a}$ עבור $x>a$ ו־$f(a)=0$ רציפה ב־(a,b) ואינה חסומה.

(ב) לא בהכרח: $f(x)=\sin\frac{1}{x-a}$ עבור $x>a$ חסומה, אך אין לה גבול ב־a^+.

(ג), (ד) לא בהכרח: הדוגמה של (א) עם $f(a)=f(b)=0$ (מגדירים גם את $f(b)$ בהתאם) אינה חסומה ואינה רציפה ב־$[a,b]$.

לכן אף אחת מארבע הטענות אינה נכונה בהכרח.

תשובה: תשובה ה.

שאלה 3

פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ד.

באינטגרציה בחלקים פעמיים: $\int(x^2+3)e^x\,dx=(x^2-2x+5)e^x+C$.

$F(0)=5+C=5$ ולכן $C=0$, ו־$F(1)=(1-2+5)e=4e$.

תשובה: תשובה ד: $F(1)=4e$.

שאלה 4

פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

כפל בצמוד: $\sqrt{x^2+\frac{6}{5}x+1}-x=\frac{\frac{6}{5}x+1}{\sqrt{x^2+\frac{6}{5}x+1}+x}\to\frac{6/5}{2}=\frac{3}{5}$.

$0\le\left|\frac{\sin(x^2)\cos x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\to 0$.

לכן הגבול הוא $\frac{3}{5}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{3}{5}$.

שאלה 5 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$f'(x)=5x^4-10x^2+5=5(x^2-1)^2\geq 0$, ומתאפסת רק ב־$x=\pm 1$.

הנגזרת אינה מחליפה סימן, ולכן f עולה ממש בכל הישר ואין לה נקודות קיצון.

תשובה: תשובה א: 0.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ג.

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, ולכן $\sin(\sin x)=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

$\cos(\sin x)=1-\frac{\sin^2 x}{2}+o(x^3)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

לכן $f(x)=-1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

תשובה: תשובה ג: $-1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$.

שאלה 7א פתרון רשמי

נציב $u=\sin x$, $du=\cos x\,dx$. המכנה: $\cos^2 x+2\sin^2 x=1+\sin^2 x=1+u^2$.

האינטגרל הופך ל־$\int \frac{3+2u}{1+u^2}\,du=3\int\frac{du}{1+u^2}+\int\frac{2u}{1+u^2}\,du=3\arctan u+\ln(1+u^2)+C$.

חזרה למשתנה x: $3\arctan(\sin x)+\ln(1+\sin^2 x)+C$.

תשובה: $3\arctan(\sin x)+\ln(1+\sin^2 x)+C$

שאלה 7ב פתרון רשמי

מאחר ש־$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, קיים $M_1>0$ כך שלכל $x>M_1$ מתקיים $f(x)<0$; בפרט $f(M_1+1)<0$.

$f(0)=3>0$ ו־f רציפה ב־$[0,M_1+1]$, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $c_1\in(0,M_1+1)$ עם $f(c_1)=0$.

באופן דומה קיים $M_2<0$ כך ש־$f(x)<0$ לכל $x<M_2$, ולכן $f(M_2-1)<0$ וקיים $c_2\in(M_2-1,0)$ עם $f(c_2)=0$.

$c_1>0>c_2$, ולכן הם שונים.

תשובה: נובע ממשפט ערך הביניים פעמיים, בשני צדי 0.

שאלה 8א פתרון רשמי

גזירות גוררת רציפות. $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}-2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=1-2=-1$, ו־$f(0)=a$, לכן $a=-1$.

הנגזרת משמאל: $f'_-(0)=b$.

מימין: עבור $x>0$, $f'(x)=\frac{e^x(x-1)-e^{2x}(2x-1)}{x^2}$. בעזרת $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, $e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2)$ המונה הוא $-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$, ולכן $f'_+(0)=-\frac{3}{2}$.

גזירות דורשת $f'_+(0)=f'_-(0)$, כלומר $b=-\frac{3}{2}$.

הערה: הפתרון הרשמי מחשב את גבול $f'(x)$ כאשר $x\to 0^+$ (מוצדק בגלל הרציפות ב־0 ומשפט לגרנז'); ישירות: $\frac{f(x)+1}{x}=\frac{e^x-e^{2x}+x}{x^2}\to-\frac{3}{2}$.

תשובה: $a=-1,\ b=-\frac{3}{2}$

שאלה 8ב פתרון רשמי

$\sqrt[5]{e}=e^{1/5}$. נשתמש בפולינום מקלורן של e^x ב־$x=\frac{1}{5}$.

לפי לגרנז׳, קיים $0<c<\frac{1}{5}$ כך ש־$\left|R_n\left(\frac{1}{5}\right)\right|=\frac{e^c}{(n+1)!\,5^{n+1}}<\frac{2}{(n+1)!\,5^{n+1}}$, כי $e<2^5$ ולכן $e^{1/5}<2$.

עבור $n=3$: $\frac{2}{15000}=\frac{2}{4!\,5^4}$, לא מספיק. עבור $n=4$: $\frac{2}{5!\,5^5}=\frac{2}{375000}<\frac{1}{10^4}$.

לכן $P_4\left(\frac{1}{5}\right)=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{5^4}$ הוא קירוב מתאים.

תשובה: $\sqrt[5]{e}\approx 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{6\cdot 5^3}+\frac{1}{24\cdot 5^4}$

שאלה 9א פתרון רשמי

עבור $x>0$, אי־השוויון שקול ל־$1<\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{1}{1+x}$, והביטוי האמצעי הוא $\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}$.

נפעיל את משפט לגרנז׳ על $f(t)=\ln(1+t)$ בקטע $[0,x]$: קיים $c\in(0,x)$ עם $\frac{\ln(1+x)}{x}=f'(c)=\frac{1}{1+c}$.

מאחר ש־$0<c<x$: $1<\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+x}$, וזהו אי־השוויון הנדרש.

תשובה: נובע ממשפט לגרנז׳.

שאלה 9ב פתרון רשמי

הטענה אינה נכונה. ניקח $a_n=-\frac{1}{n}$, $b_n=-2n$.

אז $a_n\to 0$ ו־$a_nb_n=2>1$ לכל n, אבל $b_n\to-\infty$.

תשובה: לא נכון (דוגמה נגדית $a_n=-\frac{1}{n},\ b_n=-2n$).

תשפ״ו · סמסטר א׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 33

שאלה 1 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

זהו מקרה של $0\cdot\infty$, ולכן נכתוב את הביטוי כלוגריתם של חזקה:

$$n(\ln(n+2)-\ln n)=n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^n.$$

ידוע ש־$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\to e^2$, ומאחר ש־$\ln$ רציפה ב־$(0,\infty)$, הגבול הוא $\ln e^2=2$.

תשובה: 2 – תשובה א.

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

פיתוח מקלורן:

$$\tan y = y + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

נציב $y = 3x$ ו־$y = x$ ונקבל

$$\tan 3x - 3\tan x = 3x + 9x^3 - 3x - x^3 + o(x^3) = 8x^3 + o(x^3).$$

לכן הגבול הוא 8.

תשובה: 8 – תשובה ד.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נבדוק תחילה ש־f הפיכה:

$$f'(x) = 3x^2 + 4 > 0,$$

ולכן f עולה ממש והפיכה.

מתקיים $f(0) = 1$, ולכן $g(1) = 0$.

לפי נוסחת הנגזרת של ההפוכה:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

תשובה: $\frac{1}{4}$ – תשובה א.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נשתמש בפיתוחי מקלורן:

$$\ln(1 + x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + o(x^{11}),$$

וכן

$$\cos(x^4) = 1 - \frac{x^8}{2} + o(x^{11}).$$

במכפלה, החזקה x^{11} מתקבלת רק מ־$x^3 \cdot \left(-\frac{x^8}{2}\right)$, ולכן מקדמה $-\frac{1}{2}$.

מכאן $\frac{f^{(11)}(0)}{11!} = -\frac{1}{2}$, כלומר

$$f^{(11)}(0) = -\frac{11!}{2}.$$

תשובה: $-\frac{11!}{2}$ – תשובה א.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

טענה א נכונה. הפונקציה f גזירה ב־$\mathbb{R}$ ולכן רציפה בו, ובפרט רציפה בכל קטע סגור וגזירה בפנימו.

לכן לכל $x \neq y$, לפי משפט לגרנז׳ קיים c בין x ל־y עם

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y),$$

ולכן

$$|f(x) - f(y)| \leq 4|x - y|.$$

עבור $x = y$ זה טריוויאלי.

טענות ב, ג, ד שגויות: $f(x) = -x$ אינה קבועה, יורדת ושלילית עבור $x > 0$.

טענה ה שגויה: $f(x) = \frac{x|x|}{1+|x|}$ מקיימת

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(1 + |x|)^2} \in [0, 1),$$

אך הנגזרת השנייה מימין ב־0 שווה 2 ומשמאל -2, ולכן $f''(0)$ אינה קיימת.

תשובה: תשובה א.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

גזירות בנקודה גוררת רציפות בה. הפונקציה $\ln(x - 1)$ רציפה ב־$(1, \infty)$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן רציפות ב־$x = 2$ דורשת

$$\lim_{x \to 2^+} \ln(x - 1) = 0 = f(2) = 4a + 2b,$$

ולכן $b = -2a$.

נגזרת מימין: $1 = \frac{1}{x-1}\Big|_{x=2}$. נגזרת משמאל: $4a + b$.

השוואת הנגזרות: $4a + b = 1$ עם $b = -2a$ נותן $2a = 1$: $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$.

תשובה: $a = \frac{1}{2},\ b = -1$ – תשובה א.

שאלה 7א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

חסם מלרע: נוכיח באינדוקציה $a_n > 4$. בסיס: $a_1 = 7 > 4$, ואם $a_n > 4$ אז

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8} > \sqrt{16} = 4.$$

מונוטוניות:

$$a_{n+1} < a_n \iff 2a_n + 8 < a_n^2 \iff (a_n - 4)(a_n + 2) > 0,$$

וזה נכון כי $a_n > 4$. לכן הסדרה יורדת.

סדרה יורדת וחסומה מלרע מתכנסת; נסמן $L = \lim a_n \geq 4$. הפונקציה $\sqrt{2x + 8}$ רציפה ב־$[-4, \infty)$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן במעבר לגבול:

$$L = \sqrt{2L + 8} \Rightarrow L^2 - 2L - 8 = 0 \Rightarrow L = 4$$

(כי $L \geq 4$).

תשובה: הסדרה מתכנסת ו־$\lim a_n = 4$.

שאלה 7ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט ערך הביניים. נגדיר $g(x)=f(x)-x$, רציפה ב־$[0,1]$ כהפרש של פונקציות רציפות.

מתקיים $g(0)=f(0)\geq 0$ ו־$g(1)=f(1)-1\leq 0$, כי ערכי f ב־$[0,1]$.

אם אחד מהם שווה 0 סיימנו; אחרת $g(0)>0>g(1)$ ולפי משפט ערך הביניים יש $x\in(0,1)$ עם $g(x)=0$, כלומר $f(x)=x$.

תשובה: קיימת נקודת שבת $f(x)=x$.

שאלה 8א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי מקלורן: $e^{ax}=1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{6}+o(x^3)$, $\sin bx=bx-\frac{b^3x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

המונה:

$$(a+b)x+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{a^3-b^3}{6}x^3+o(x^3).$$

קיום הגבול מחייב $a+b=0$ ו־$a^2=1$. אז $b=-a$ והגבול

$$\frac{a^3+a^3}{6}=\frac{a^3}{3}.$$

שתי אפשרויות: $a=1,b=-1$ עם גבול $\frac{1}{3}$, או $a=-1,b=1$ עם גבול $-\frac{1}{3}$.

תשובה: $a=1,b=-1,\ L=\frac{1}{3}$ או $a=-1,b=1,\ L=-\frac{1}{3}$

שאלה 8ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפולינום מקלורן: $\ln\frac{3}{2}=f\left(\frac{1}{2}\right)$ עבור $f(x)=\ln(1+x)$, שפולינום מקלורן שלה

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}.$$

נחשב את הנגזרות:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},$$

ולכן שארית לגרנז׳:

$$|R_n|=\frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\leq\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

עבור $0<c<\frac{1}{2}$.

עבור $n=3$: $\frac{1}{64}>\frac{1}{100}$. עבור $n=4$: $\frac{1}{100}<\frac{1}{160}$.

לכן

$$\ln\frac{3}{2}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}.$$

תשובה: $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}=\frac{77}{192}\approx 0.401$

שאלה 9א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

עבור $\int \frac{\ln x}{x}dx$ נציב $t=\ln x$, $dt=\frac{dx}{x}$:

$$\int t\,dt=\frac{\ln^2 x}{2}.$$

בנוסף,

$$\int \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}.$$

תשובה: $\frac{(\ln x)^2}{2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

שאלה 9ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הצבה $u=x^2$, $du=2x\,dx$:

$$\int \frac{x^3dx}{x^4-5x^2+6}=\frac{1}{2}\int \frac{u\,du}{(u-2)(u-3)}.$$

שברים חלקיים:

$$\frac{u}{(u-2)(u-3)}=\frac{-2}{u-2}+\frac{3}{u-3}.$$

נבצע אינטגרציה ונחזור ל־x:

$$\frac{1}{2}(-2\ln|u-2|+3\ln|u-3|)+C=-\ln|x^2-2|+\frac{3}{2}\ln|x^2-3|+C.$$

תשובה: $F(x)=-\ln|x^2-2|+\frac{3}{2}\ln|x^2-3|$

תשפ"ו · סמסטר א' · מועד ב'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 35

שאלה 1

פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

(א): $\cos(\pi n)=(-1)^n$, ו־$1\le \ln n\le n$ (עבור $n\ge 3$) נותן $1\le \sqrt[n]{\ln n}\le \sqrt[n]{n}\to 1$, ולכן $\sqrt[n]{\ln n}\to 1$ לפי כלל הסנדוויץ'.
מכאן $a_{2k}\to 1$ ו־$a_{2k+1}\to -1$ – שני גבולות חלקיים שונים, והסדרה אינה מתכנסת.

(ב): $0\le \sqrt[n]{|\sin n|}\le 1$, ו־$\frac{1}{n}\to 0$, ולכן (אפסה כפול חסומה) $a_n\to 0$.

(ג): $\frac{n!}{n^n}\to 0$ (מבחן המנה) ו־$\sin n$ חסומה, ולכן $a_n\to 0$. (ד): $\frac{\ln n}{n}\to 0$ כפול חסומה, $a_n\to 0$.

(ה): $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to e^{-1}$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 2 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

פיתוחי מקלורן מסדר 4: $e^{ax^2}=1+ax^2+\frac{a^2x^4}{2}+o(x^4)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$.

$\frac{e^{ax^2}-\cos x}{x^4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{24}\right)+\frac{o(x^4)}{x^4}$.

כדי שהגבול יהיה קיים וסופי חייב $a=-\frac{1}{2}$, ואז $L=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$.

תשובה: $L=\frac{1}{12}$ – תשובה א.

שאלה 3 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

נסמן $G(x)=\int_0^x f(t)dt$. לפי המשפט היסודי $G'(x)=f(x)$.

$g(x)=G(x^3)$, ולפי כלל השרשרת $g'(x)=f(x^3)\cdot 3x^2$.

$g'(2)=f(8)\cdot 12=-12$.

תשובה: -12 – תשובה א.

שאלה 4 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$e^{x^5}=1+x^5+\frac{1}{2}x^{10}+o(x^{14})$, $\sin(x^4)=x^4-\frac{1}{6}x^{12}+o(x^{14})$.

המכפלה: $x^4+x^9-\frac{1}{6}x^{12}+\frac{1}{2}x^{14}+o(x^{14})$.

המקדם של x^{14} הוא $\frac{1}{2}=\frac{f^{(14)}(0)}{14!}$, ולכן $f^{(14)}(0)=\frac{14!}{2}$.

תשובה: $\frac{14!}{2}$ – תשובה א.

שאלה 5 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

(א): אם $y_1<z<y_2$ עם $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, אז לפי משפט ערך הביניים בקטע שבין x_1 ל־x_2 קיים c עם $f(c)=z$. לכן התמונה היא קטע או קרן, ומכיוון ש־f חסומה – קטע.

(ב) שגויה: $f(x)=\sin x$. (ג) שגויה: $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+1}$ – הגבולות קיימים (שווים 0) אך f אינה מונוטונית.

(ד) שגויה: $f(x)=\arctan x$. (ה) שגויה: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ נותנת $x|f(x)|\to 0$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

רציפות: $\lim_{x\to 1^-}f=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ ו־$f(1)=a+b+\frac{\pi}{4}$, ולכן $a+b=0$.

נגזרת משמאל: $\left(\arctan x^2\right)'=\frac{2x}{1+x^4}$, ולכן $f'_-(1)=1$. נגזרת מימין: $f'_+(1)=2a+b$.

$2a+b=1$ יחד עם $b=-a$ נותן $a=1$, $b=-1$.

תשובה: $a=1,\ b=-1$ – תשובה א.

שאלה 7א פתרון רשמי

f רציפה בקטע הסגור $[0,1]$, ולפי משפט ויירשטראס מקבלת בו מינימום: קיים $a \in [0,1]$ עם $f(a) = \min_{[0,1]} f$.

נבחר $m = \frac{f(a)}{2} > 0$. לכל $x \in [0,1]$: $f(x) \geq f(a) > m$.

תשובה: $m = \frac{1}{2}\min_{[0,1]} f$

שאלה 7ב פתרון רשמי

נסמן $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^7}$, רציפה וגזירה ב־$(1,2)$.

קיום: כאשר $x \to 1^+$, $\frac{1}{(x-1)^3} \to \infty$ והשאר חסום, ולכן $f \to \infty$. כאשר $x \to 2^-$, $\frac{1}{(x-2)^7} \to -\infty$, ולכן $f \to -\infty$. לכן יש $a < b$ ב־$(1,2)$ עם $f(a) > 0 > f(b)$, ולפי משפט ערך הביניים יש שורש.

יחידות: $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^4} - \frac{7}{(x-2)^8} < 0$ ב־$(1,2)$, ולכן f יורדת ממש ויש לכל היותר שורש אחד.

תשובה: קיים פתרון יחיד ב־$(1,2)$.

שאלה 8א פתרון רשמי

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

הגורם הראשון שואף ל־$\frac{1}{2}$ והשני ל־1 (גבולות מפורסמים), ולכן הגבול $\frac{1}{2}$.

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 8ב פתרון רשמי

$$\sqrt{17} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}} = f\left(\frac{1}{16}\right).$$

$f'(x) = 2(1+x)^{-1/2}$, $f''(x) = -(1+x)^{-3/2}$. שארית לגרנז׳ מסדר 1:

$$|R_1| = \left|\frac{f''(c)}{2!}\right|\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{2(1+c)^{3/2}} \cdot \frac{1}{256} < \frac{1}{512} < \frac{1}{100}.$$

$P_1(x) = 4 + 2x$, ולכן $\sqrt{17} \approx 4 + \frac{2}{16} = 4 + \frac{1}{8}$.

תשובה: $\sqrt{17} \approx 4 + \frac{1}{8}$

שאלה 9א פתרון רשמי

הצבה אוניברסלית $t = \tan\frac{x}{2}$: $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

$$\int \frac{2\,dt}{7(1-t^2)+8t+9(1+t^2)} = \int \frac{2\,dt}{2t^2+8t+16} = \int \frac{dt}{(t+2)^2+4}.$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{t+2}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+2}{2}\right) + C.$$

תשובה: $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)+2}{2}\right) + C$

שאלה 29ב פתרון רשמי

חילוק פולינומים: $f(x) = 2x + 1 + \frac{x+2}{x^2+1}$.

$\int f = x^2 + x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C$.

$F(0) = C = 3$.

תשובה: $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + 3$

תשפ"ו · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 38

שאלה 1 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

ידוע ש־$2 \to \frac{2n+1}{n+5}$ ו־$e^{-1} \to \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. כיוון ש־$\sin\frac{\pi n}{2}$ מחזורית במחזור 4, נבדוק את תת־הסדרות בהתאם לשארית החלוקה של n ב־4.

עבור $n = 4k$ ועבור $n = 4k+2$ מתקיים $\sin\frac{\pi n}{2} = 0$, ולכן $a_n \to 2$.

עבור $n = 4k+1$ מתקיים $\sin\frac{\pi n}{2} = 1$, ולכן $a_n \to -2 + e^{-1}$. עבור $n = 4k+3$ מתקיים $\sin\frac{\pi n}{2} = -1$, ולכן $a_n \to -2 - e^{-1}$.

ארבע תת־הסדרות מכסות את כל הסדרה, ולכן הגבולות החלקיים הם בדיוק $2,\ -2 + \frac{1}{e},\ -2 - \frac{1}{e}$.

תשובה: 3 גבולות חלקיים – תשובה א.

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נבדוק כל טענה בגזירה. טענה א נכונה: לפי כלל המכפלה

$$(F \cdot G)' = F'G + FG' = f \cdot G + g \cdot F.$$

טענה ב שגויה:

$$\left(e^F\right)' = f \cdot e^F,$$

ולא $f \cdot e^f$. טענה ג שגויה:

$$(\sin F)' = f\cos F,$$

ולא $f'\cos f$.

טענה ד שגויה:

$$(F(G))' = f(G) \cdot g,$$

ולא $f(g)$. טענה ה שגויה:

$$\left((x^2+1)F(\arctan x)\right)' = 2xF(\arctan x) + f(\arctan x),$$

ולא $f(\arctan x)$ באופן כללי (למשל $f \equiv 1, F = x$).

תשובה: תשובה א.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נגזור לוגריתמית:

$$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln \sin(e^x).$$

נגזור את שני האגפים:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \cdot \ln \sin(e^x) + \cos x \cdot \frac{\cos(e^x)\, e^x}{\sin(e^x)}.$$

נציב $x = 0$: $f(0) = \sin 1$ ו־$\frac{\cos 1}{\sin 1}$, ולכן $\frac{f'(0)}{f(0)} = 0 + \frac{\cos 1}{\sin 1}$,

$$f'(0) = \sin 1 \cdot \frac{\cos 1}{\sin 1} = \cos 1.$$

תשובה: $\cos(1)$ – תשובה א.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

נחשב את השיפוע m ואת n של האסימפטוטה $y = mx + n$. השיפוע הוא

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}}}{x} = -1.$$

נחשב את n:

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 8} + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x + 8}{\sqrt{x^2 + 4x + 8} - x}.$$

מחלקים ב־$|x| = -x$:

$$\frac{-4 - \frac{8}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1} \to \frac{-4}{2} = -2.$$

תשובה: $y = -x - 2$ – תשובה ד.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נבדוק את טענה א. מתקיים

$$x_n = \frac{2n+3}{n+17} = 2 - \frac{31}{n+17},$$

ולכן $x_n \to 2$ ו־$x_n \neq 2$ לכל n. לפי הגדרת היינה, $f(x_n) \to \infty$. טענה א נכונה.

טענה ב שגויה: $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ המוגדרת ב־$\mathbb{R} \setminus \{2\}$ עולה ממש ב־$(-\infty, 2)$ ויורדת ממש ב־$(2, \infty)$, ולכן אין לה מינימום מקומי.

טענה ג שגויה: אותה פונקציה חיובית ואינה מקבלת ערכים שליליים.

טענה ד שגויה: $f(x) = \frac{2+\sin\frac{1}{x-2}}{(x-2)^2}$ שואפת ל־∞, אך בנגזרתה האיבר $-\frac{\cos\frac{1}{x-2}}{(x-2)^4}$ דומיננטי ליד 2 ומחליף סימן אינסוף פעמים, ולכן היא אינה מונוטונית באף קטע $(2, b)$.

טענה ה שגויה:

$$(3-x)^{f(x)} = e^{f(x)\ln(1+(2-x))}$$

והגבול תלוי ב־$\lim(2-x)f(x)$; עבור $f = \frac{1}{(x-2)^2}$ הגבול משמאל הוא ∞.

תשובה: תשובה א.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

רציפות:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

וגם $f(0) = b$, ולכן $b = 1$.

נגזרת משמאל:

$$f'_-(0) = (3a\cos 3x - 2b\sin 2x)_{x=0} = 3a.$$

נגזרת מימין:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x-1}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

השוואה: $3a = \frac{1}{2}$, כלומר $a = \frac{1}{6}$.

תשובה: $b = 1$, $a = \frac{1}{6}$ – תשובה א.

שאלה 7א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{2x^3+4x-4}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

הצבת $x = -1$: $-10 = 2B$, $B = -5$. השוואת מקדמים נותנת $A = 0$, $C = 2$, $D = 1$: האינטגרנד הוא

$$-\frac{5}{(x+1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

נחשב כל אינטגרל בנפרד: $\int -\frac{5}{(x+1)^2}dx = \frac{5}{x+1}$, $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1)$, $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$.

תשובה: $\frac{5}{x+1} + \ln(x^2+1) + \arctan x + C$

שאלה 7ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נעביר הכול לאגף אחד ונגדיר $g(x) = \arctan x + 4x^3 - 10$, רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות רציפות וגזירות.

קיום: $g(0) = -10 < 0$ ו־$g(2) = \arctan 2 + 32 - 10 > 0$. לפי משפט ערך הביניים יש $c \in (0,2)$ עם $g(c) = 0$.

יחידות:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 12x^2 > 0$$

לכל x, ולכן g עולה ממש ויש לה לכל היותר שורש אחד.

תשובה: קיים פתרון יחיד, והוא בקטע $(0,2)$.

שאלה 8א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

פיתוחי מקלורן: $e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $a\sin x = ax - \frac{ax^3}{6} + o(x^3)$.

המונה:

$$\left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{a^3+a}{6}x^3 + o(x^3).$$

כדי שהגבול יהיה סופי חייב $a^2 = 1$, ואז הגבול הוא

$$\frac{a^3+a}{6} = \frac{a}{3}$$

(כי $a^3 = a$).

מהשוויון $\frac{a}{3} = -\frac{1}{3}$ נקבל $a = -1$.

תשובה: $a = -1$

שאלה 8ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפולינום מקלורן של e^x בנקודה $x=\frac{1}{4}$:

$$e^{1/4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1/4)^k}{k!}+R_n,$$

עם

$$R_n=\frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1},$$

כאשר $0<c<\frac{1}{4}$.

מתקיים $e^c<e^{1/4}<3$, ולכן

$$|R_n|<\frac{3}{(n+1)!\,4^{n+1}}.$$

עבור $n=2$:

$$\frac{3}{6\cdot 64}=\frac{1}{128}>\frac{1}{1000}.$$

עבור $n=3$:

$$\frac{3}{24\cdot 256}=\frac{1}{2048}<\frac{1}{1000}.$$

לכן

$$\sqrt[4]{e}\approx 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{384}.$$

תשובה: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{384}\approx 1.2839$

שאלה 9א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הצבה $t=\sqrt{x}$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t\,dt.$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int 2te^t dt=2te^t-\int 2e^t dt=2(t-1)e^t+C.$$

חזרה ל־x:

$$F(x)=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$$

תשובה: $F(x)=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$

שאלה 9ב נבדק על ידי צוות הקורס

הבסיס שואף ל־1 והמעריך שואף ל־∞. זהו מקרה של 1^∞, ולכן אי אפשר לחשב את הגבול ישירות מגבולות הבסיס והמעריך.

נסמן את הסדרות שבבסיס ובחזקה: $1+b_n = \frac{n^2+2n}{n^2+1}$ עם $b_n = \frac{2n-1}{n^2+1} \to 0$, ו־$c_n = \frac{n^2+1}{8n+3} \to \infty$.

נכתוב

$$(1+b_n)^{c_n} = \left[(1+b_n)^{1/b_n}\right]^{b_n c_n}.$$

מתקיים $b_n c_n = \frac{2n-1}{8n+3} \to \frac{1}{4}$, והבסיס $(1+b_n)^{1/b_n}$ שואף ל־e.

לכן הגבול הוא $e^{1/4}$.

תשובה: $e^{1/4}$

תשפ"ה · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **41**

שאלה 1א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה את הגבול האפשרי (נקודת שבת):

$$2L-1 = \sqrt{4L+9} \Rightarrow L^2 - 2L - 2 = 0 \Rightarrow L = 1 \pm \sqrt{3};$$

רק $L = 1+\sqrt{3}$ מקיים $2L-1 \geq 0$.

חסם מלרע: באינדוקציה $a_n > 1+\sqrt{3}$. בסיס: $a_1 = 3 > 1+\sqrt{3}$. אם $a_n > 1+\sqrt{3}$ אז

$$4a_n + 9 > 13 + 4\sqrt{3} = (1+2\sqrt{3})^2,$$

ולכן

$$a_{n+1} > \frac{1+1+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}.$$

מונוטוניות: $a_1 = 3 < \frac{1+\sqrt{21}}{2} = a_2$. הפונקציה $g(t) = \frac{1+\sqrt{4t+9}}{2}$ עולה, לכן מ־$a_{n+1} < a_n$ נובע

$$a_{n+2} = g(a_{n+1}) < g(a_n) = a_{n+1}.$$

הסדרה יורדת.

יורדת וחסומה מלרע – מתכנסת. הפונקציה g רציפה ב־$\left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן במעבר לגבול: $L = g(L)$, $L \geq 1+\sqrt{3}$, ולכן $L = 1+\sqrt{3}$.

תשובה: $\lim a_n = 1+\sqrt{3}$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור של כל גורם. מתקיים

$$\sqrt[5]{1+3x^2} = 1 + \frac{3}{5}x^2 + o(x^2),$$

וכן

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^2),$$

ולכן ההפרש הוא $\frac{13}{5}x^2 + o(x^2)$.

בנוסף,

$$\sin(4x) = 4x + o(x),$$

וכן

$$e^{3x^3} - 1 = 3x^3 + o(x^3).$$

לכן הגבול הוא

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{13}{5}x^2 \cdot 4x}{3x^3} = \frac{52}{15}.$$

תשובה: $\frac{52}{15}$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נעביר הכול לאגף אחד ונגדיר $h(x) = \arctan x + x - 1$, רציפה וגזירה על $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות רציפות וגזירות.

מתקיים

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 1 > 0,$$

לכן h עולה ממש ויש לה לכל היותר שורש אחד.

מתקיים $h(0) = -1 < 0$, $h(1) = \frac{\pi}{4} > 0$; לפי משפט ערך הביניים יש שורש ב־$(0,1)$.

תשובה: פתרון אחד בדיוק (בקטע $(0,1)$).

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

האינטגרנד $\sqrt[4]{1+15t^6}$ רציף ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת:

$$f'(x) = 2e^{2x}\sqrt[4]{1+15e^{12x}} - \cos x \sqrt[4]{1+15\sin^6 x}.$$

נציב $x = 0$:

$$f'(0) = 2 \cdot \sqrt[4]{16} - 1 \cdot \sqrt[4]{1} = 4 - 1 = 3.$$

תשובה: $f'(0) = 3$

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נתחיל בתחום ההגדרה: $x \neq -2$. החיתוך עם הצירים הוא ב־$(0,0)$.

אסימפטוטות: אנכית $x=-2$ ($f \to -\infty$ משני הצדדים). נכתוב

$$f(x) = x - 4 + \frac{12}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2},$$

לכן אסימפטוטה משופעת $y = x-4$ ב־$\pm\infty$.

הנגזרת היא

$$f'(x) = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}.$$

היא חיובית ב־$(-\infty,-6)$, שלילית ב־$(-6,-2)$, חיובית ב־$(-2,\infty)$ (פרט ל־0).

לכן f עולה ב־$(-\infty,-6]$, יורדת ב־$[-6,-2)$, עולה ב־$(-2,\infty)$. מקסימום מקומי $\left(-6,-\frac{27}{2}\right)$; ב־$x=0$ אין קיצון.

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה היא

$$f''(x) = \frac{24x}{(x+2)^4}.$$

לכן הפונקציה קעורה ב־$(-\infty,-2)$ וב־$(-2,0)$, קמורה ב־$(0,\infty)$. נקודת פיתול $(0,0)$.

תשובה: תחום $x \neq -2$; אסימפטוטות $x=-2$, $y=x-4$; מקס׳ $\left(-6,-\frac{27}{2}\right)$; פיתול $(0,0)$.

שאלה 4א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u=\arctan x$, $v'=x^{-3}$: ולכן $v=-\frac{1}{2x^2}$,

$$\int = -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2},$$

לכן

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan x.$$

בסך הכול נקבל:

$$-\frac{\arctan x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

תשובה: $-\frac{\arctan x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{\arctan x}{2} + C$

שאלה 24ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

חילוק פולינומים:

$$\frac{x^4+3x^3+3x^2+x}{x^2-2x+10} = x^2+5x+3+\frac{-43x-30}{x^2-2x+10}.$$

נפצל את השארית:

$$\frac{-43x-30}{x^2-2x+10} = -\frac{43}{2}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+10} - \frac{73}{(x-1)^2+9}.$$

אינטגרציה:

$$\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+3x-\frac{43}{2}\ln(x^2-2x+10)-\frac{73}{3}\arctan\frac{x-1}{3}+C.$$

תשובה: $\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+3x-\frac{43}{2}\ln(x^2-2x+10)-\frac{73}{3}\arctan\frac{x-1}{3}+C$

שאלה 25א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפתח לפי טיילור. מתקיים $e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2)$, $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, ולכן

$$e^{2x}\sin x = x+2x^2+\left(2-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3) = x+2x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3).$$

המונה:

$$(1+a)x+(2+b)x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3).$$

גבול סופי מחייב $a=-1$, $b=-2$, ואז הגבול $\frac{11}{6}$.

תשובה: $a=-1$, $b=-2$, הגבול $\frac{11}{6}$.

שאלה 25ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה התכנסות. האינטגרנד רציף וחיובי ב־$[1,\infty)$ כמנה של פולינומים שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ושקול ל־$\frac{1}{x^2}$, לכן מתכנס.

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{x+6}{x(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3},$$

ופונקציה קדומה:

$$\ln\frac{x(x+3)}{(x+2)^2}.$$

הגבול של הקדומה ב־∞ הוא $\ln 1 = 0$, וערכה ב־1 הוא $\ln\frac{4}{9}$. לכן האינטגרל שווה $\ln\frac{9}{4}$.

תשובה: מתכנס, $\ln\frac{9}{4}$.

תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 43

שאלה 1א

נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהסדרה עולה וחסומה. חסם: נוכיח באינדוקציה $0 < a_n < 3$. אכן $a_1 = 1$. אם $0 < a_n < 3$ אז $3 < 6 - a_n < 6$, ולכן

$$0 < a_{n+1} = \frac{9}{6 - a_n} < 3.$$

מונוטוניות: מתקיים

$$a_{n+1} - a_n = \frac{9 - 6a_n + a_n^2}{6 - a_n} = \frac{(a_n - 3)^2}{6 - a_n} > 0,$$

לכן הסדרה עולה ממש.

סדרה עולה וחסומה מלעיל מתכנסת; נסמן $L = \lim a_n \in [1, 3]$.

מעבר לגבול נותן

$$L = \frac{9}{6 - L} \Rightarrow L^2 - 6L + 9 = 0 \Rightarrow L = 3.$$

תשובה: $\lim a_n = 3$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$, ולכן נשתמש בקירובי טיילור סביב 0. מתקיים $\sqrt[7]{1 + 6x} = 1 + \frac{6}{7}x + o(x)$, $\sqrt[6]{1 - 7x} = 1 - \frac{7}{6}x + o(x)$, ולכן ההפרש הוא

$$\frac{85}{42}x + o(x).$$

באופן דומה $\ln(1 + 2x) = 2x + o(x)$, וגם

$$1 - \cos(3x) = \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

לכן

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{85}{42}x \cdot 2x}{\frac{9}{2}x^2} = \frac{85}{21} \cdot \frac{2}{9} = \frac{170}{189}.$$

תשובה: $\frac{170}{189}$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נעביר את המשוואה לצורה $a = h(x)$ ונחקור את h. הערך $x = 1$ אינו פתרון לאף a (מתקבל $1 + a = a$). עבור $x \in [0, 1)$ המשוואה שקולה ל־$a = h(x)$ כאשר

$$h(x) = \frac{x^4}{x - 1}.$$

הנגזרת היא

$$h'(x) = \frac{4x^3(x-1) - x^4}{(x-1)^2} = \frac{x^3(3x-4)}{(x-1)^2} < 0$$

ב־$(0, 1)$, לכן h יורדת ממש ב־$[0, 1)$.

מתקיים $h(0) = 0$ ו־$\lim_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$. הפונקציה h רציפה ב־$[0, 1)$ כמנה של פולינומים שהמכנה שלה אינו מתאפס שם; מרציפות ומונוטוניות ממש, h מקבלת כל ערך ב־$(-\infty, 0]$ בדיוק פעם אחת, ואינה מקבלת ערכים חיוביים.

לכן יש פתרון יחיד ב־$[0, 1]$ אם ורק אם $a \leq 0$ (ואין פתרון כלל עבור $a > 0$).

תשובה: $a \leq 0$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$: מונה ומכנה שואפים ל־0, ולכן נשתמש בכלל לופיטל. הפונקציה $\ln(1 + t^3)$ רציפה בקטע $(-1, \infty)$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת, נגזרת המונה היא

$$2x \ln(1 + x^6) - 4x^3 \ln(1 + x^{12}).$$

לפי לופיטל נחשב את הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x \ln(1 + x^6) - 4x^3 \ln(1 + x^{12})}{8x^7}.$$

מתקיים $\ln(1 + x^6) \sim x^6$ ו־$4x^3 \ln(1 + x^{12}) = O(x^{15})$, לכן הגבול הוא

$$\frac{2x^7}{8x^7} = \frac{1}{4}.$$

תשובה: $\frac{1}{4}$

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נתחיל בתחום ההגדרה: $x \neq 1$. החיתוך עם הצירים הוא ב־$(0,0)$.

אסימפטוטות: אנכית $x=1$ ($f \to +\infty$ משני הצדדים). נכתוב

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2},$$

לכן אסימפטוטה משופעת $y = x+2$ ב־$\pm\infty$.

הנגזרת היא

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

והיא חיובית ב־$(-\infty,1)$ (פרט ל־0), שלילית ב־$(1,3)$, חיובית ב־$(3,\infty)$.

לכן f עולה ב־$(-\infty,1)$, יורדת ב־$(1,3]$, עולה ב־$[3,\infty)$. מינימום מקומי $\left(3,\frac{27}{4}\right)$; ב־$x=0$ אין קיצון.

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה היא

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4},$$

ולכן הפונקציה קעורה ב־$(-\infty,0)$, קמורה ב־$(0,1)$ וב־$(1,\infty)$. נקודת פיתול $(0,0)$.

תשובה: תחום $x \neq 1$; אסימפטוטות $x=1$, $y=x+2$; מינ׳ $\left(3,\frac{27}{4}\right)$; פיתול $(0,0)$.

שאלה 4א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הצבה $u = e^x$, $du = e^x\,dx$:

$$\int \arctan u \, du.$$

בחלקים:

$$\int \arctan u\,du = u\arctan u - \int \frac{u}{1+u^2}\,du = u\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C.$$

חזרה ל־x:

$$e^x \arctan(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.$$

תשובה: $e^x \arctan(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

חילוק:

$$\frac{x^3+2}{x^3+3x} = 1 + \frac{2-3x}{x(x^2+3)}.$$

שברים חלקיים:

$$\frac{2-3x}{x(x^2+3)} = \frac{2}{3x} - \frac{2x+9}{3(x^2+3)} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}.$$

אינטגרציה:

$$x + \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln(x^2+3) - \sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

תשובה: $x + \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln(x^2+3) - \sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

שאלה 5א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפתח את שני האיברים במונה לפי טיילור. מתקיים

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2\cdot\frac{1}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6).$$

באופן דומה,

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6).$$

המונה:

$$(a-b+2)x^2 + \left(-b(a-b) - \frac{2}{3}\right)x^4 + \left(b^2(a-b) + \frac{4}{45}\right)x^6 + o(x^6).$$

מקדם x^2 מתאפס: $a-b=-2$. מקדם x^4: $2b-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow b=\frac{1}{3}$, ואז $a=-\frac{5}{3}$.

הגבול הוא מקדם x^6:

$$\frac{1}{9}\cdot(-2) + \frac{4}{45} = -\frac{2}{15}.$$

תשובה: $a=-\frac{5}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, הגבול $-\frac{2}{15}$.

שאלה 25ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה התכנסות. מתקיים $x^2-9x+18=(x-3)(x-6)>0$ ב־$[10,\infty)$, ולכן האינטגרנד רציף שם כמנה של פולינומים שהמכנה שלה אינו מתאפס, והוא שקול ל־$\frac{6}{x^2}$ – לכן מתכנס.

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{6}{(x-3)(x-6)}=\frac{2}{x-6}-\frac{2}{x-3},$$

ופונקציה קדומה:

$$2\ln\frac{x-6}{x-3}.$$

הגבול של הקדומה ב־∞ הוא 0, וערכה ב־10 הוא $2\ln\frac{4}{7}$. לכן האינטגרל שווה

$$-2\ln\frac{4}{7}=2\ln\frac{7}{4}.$$

תשובה: מתכנס, $2\ln\frac{7}{4}$.

תשפ״ה · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **45**

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהסדרה יורדת וחסומה מלרע. חסם מלרע: נוכיח באינדוקציה ש־$a_n>1$. מתקיים $a_1=\alpha>1$, ואם $a_n>1$ אז $a_{n+1}=\sqrt{a_n}>\sqrt{1}=1$.

מונוטוניות: לכל $a>1$ מתקיים $\sqrt{a}<a$ (כי $a<a^2$), לכן $a_{n+1}=\sqrt{a_n}<a_n$ – הסדרה יורדת ממש.

סדרה יורדת וחסומה מלרע מתכנסת; נסמן $L=\lim a_n$, ומתקיים $L\geq 1$.

מעבר לגבול ב־$a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ (השורש רציף ב־$[0,\infty)$): $L=\sqrt{L}$, כלומר $L\in\{0,1\}$. מאחר ש־$L\geq 1$, $L=1$.

תשובה: הסדרה יורדת וחסומה מלרע ע״י 1; $\lim a_n=1$.

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$, ולכן נשתמש בקירובי טיילור סביב 0: $\sqrt[3]{1+2x}=1+\frac{2}{3}x+o(x)$, $e^{3x}=1+3x+o(x)$, ולכן

$$\sqrt[3]{1+2x}-e^{3x}=-\frac{7}{3}x+o(x).$$

באופן דומה $\sin(2x)=2x+o(x)$, וגם

$$1-\cos(4x)=\frac{(4x)^2}{2}+o(x^2)=8x^2+o(x^2).$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{3}x\cdot 2x}{8x^2}=-\frac{14}{24}=-\frac{7}{12}.$$

תשובה: $-\frac{7}{12}$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהפונקציה מחליפה סימן פעמיים ונשתמש במשפט ערך הביניים. נגדיר

$$f(x) = x^4 - 32x + e\pi,$$

פונקציה רציפה על $\mathbb{R}$ כפולינום. נשתמש ב־$e\pi < 3 \cdot 3.2 < 10$.

מתקיים $f(0) = e\pi > 0$, $f(2) = 16 - 64 + e\pi = -48 + e\pi < 0$, $f(4) = 256 - 128 + e\pi > 0$.

לפי משפט ערך הביניים יש שורש $x_1 \in (0,2)$ ושורש $x_2 \in (2,4)$; הקטעים זרים ולכן $x_1 \neq x_2$.

תשובה: יש שורש ב־$(0,2)$ ושורש נוסף ב־$(2,4)$.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה את C מתנאי הרציפות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 2,$$

לכן $C = 2$.

נבדוק גזירות לפי ההגדרה:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1-2x}{x^2}.$$

מאחר ש־f גזירה פעמיים ב־0, היא גזירה בסביבת 0; זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, ולפי לופיטל הוא שווה לגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-2}{2x}$$

(אם קיים).

לפי הגדרת הנגזרת השנייה מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2} = \frac{3}{2}.$$

לכן g גזירה ב־0 ו־$g'(0) = \frac{3}{2}$.

תשובה: $C = 2$, $g'(0) = \frac{3}{2}$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחקור את הפונקציה שלב אחר שלב. תחום ההגדרה: $x \neq \pm 2$. הפונקציה אי־זוגית, ו־$f(0) = 0$.

אסימפטוטות: אנכיות $x = \pm 2$ ($\lim_{x \to 2^{\pm}} f = \pm\infty$, $\lim_{x \to -2^{\pm}} f = \pm\infty$). מכיוון שמתקיים

$$f(x) = 2x + \frac{8x}{x^2 - 4},$$

האסימפטוטה המשופעת היא $y = 2x$ ב־$\pm\infty$.

הנגזרת היא

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

נקודות חשודות: $x = 0, \pm 2\sqrt{3}$. מתקיים $f' > 0$ עבור $|x| > 2\sqrt{3}$ ו־$f' < 0$ עבור $|x| < 2\sqrt{3}$ ($x \neq 0, \pm 2$).

עולה ב־$(-\infty, -2\sqrt{3}]$ וב־$[2\sqrt{3}, \infty)$, יורדת ב־$[-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, 2\sqrt{3}]$. מקסימום מקומי $(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$, מינימום מקומי $(2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$; ב־$x = 0$ אין קיצון.

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה היא

$$f''(x) = \frac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3},$$

ולכן הפונקציה קעורה ($\cap$) ב־$(-\infty, -2)$ וב־$(0, 2)$, קמורה ($\cup$) ב־$(-2, 0)$ וב־$(2, \infty)$. נקודת פיתול: $(0, 0)$.

תשובה: תחום $x \neq \pm 2$; אסימפטוטות $x = \pm 2$, $y = 2x$; מקס׳ $(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$, מינ׳ $(2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$; פיתול $(0, 0)$.

שאלה 4א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = \ln x$, $v' = x^7$: $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^8}{8}$.

נקבל

$$\int x^7 \ln x \, dx = \frac{x^8 \ln x}{8} - \int \frac{x^7}{8} \, dx = \frac{x^8 \ln x}{8} - \frac{x^8}{64} + C.$$

תשובה: $\frac{x^8 \ln x}{8} - \frac{x^8}{64} + C$

שאלה 4ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

האינטגרנד רציף ב־$[0, \frac{\pi}{2}]$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס. נחשב בהצבה $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$; הגבולות $0 \to 0$, $\frac{\pi}{2} \to 1$, ונקבל

$$\int_0^1 \frac{u^4}{u^{10} + 1} \, du.$$

נבצע הצבה נוספת $v = u^5$, $dv = 5u^4 \, du$, ונקבל

$$\frac{1}{5} \int_0^1 \frac{dv}{1 + v^2} = \frac{1}{5} \arctan v \Big|_0^1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

תשובה: $\frac{\pi}{20}$

שאלה 5א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור סביב 0:

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

וכן $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

לכן המונה הוא

$$(5 + a)x^2 + 5x^3 + o(x^3).$$

כדי שהגבול יהיה סופי חייב $5 + a = 0$, כלומר $a = -5$; אז הגבול הוא 5.

תשובה: $a = -5$, הגבול 5.

שאלה 5ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

האינטגרנד חיובי ורציף ב־$[1, \infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס, ומתקיים

$$\frac{x+2}{x^3+4x} \sim \frac{1}{x^2},$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי האינטגרל מתכנס.

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{x+2}{x(x^2+4)} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{x^2+4}.$$

נקבל פונקציה קדומה:

$$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}.$$

הגבול שלה ב־∞ הוא $0 + \frac{\pi}{4}$ (מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$), וערכה ב־1 הוא $\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$. לכן הערך

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 5}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.$$

תשובה: מתכנס, $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 5}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} \approx 0.956$.

תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **47**

שאלה 1 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

שברים חלקיים: $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = -\frac{1}{x} + \frac{3x+1}{x(x-1)(x+1)}$.

פונקציה קדומה: $\ln\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$, השואפת ל־0 כאשר $x \to \infty$; ב־$x = 2$ ערכה $\ln\frac{1}{6}$.

לכן הערך $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6 = 0 - \ln\frac{1}{6}$.

תשובה: תשובה א: $\ln 2 + \ln 3$.

שאלה 2 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, $\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$, לכן
$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. ההפרש $\frac{x^4}{6} + o(x^4)$, והגבול $\frac{1}{6}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{1}{6}$.

שאלה 3 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$g(x) = 3x + \arctan x - 2\sin x - 1$, רציפה, $g \to \pm\infty$ כאשר $x \to \pm\infty$: יש שורש (ערך הביניים).
$g'(x) = 3 + \frac{1}{1+x^2} - 2\cos x \geq 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0$: g עולה ממש, ולכן השורש יחיד.

תשובה: תשובה א.

שאלה 4 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

א: אם $a_{n_k} \to L$ (סופי או $\pm\infty$) אז $a_{n_k} b_{n_k} \to L \cdot 1 = L$; ולהפך, כי $b_n \neq 0$ החל ממקום מסוים ו־$a_n = \frac{a_n b_n}{b_n}$. נכונה.

ב, ג: $a_n = b_n = (-1)^n$ – הגבולות אינם קיימים. ד: $a_n = 1$, $b_n = 2$. ה: $a_n = 2 + (-1)^n$, $b_n = 1$ – $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ אך המנה מתחלפת בין 3 ל־$\frac{1}{3}$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 5 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

המונה: $(a-b)x + \left(\frac{a^2}{2} - 2\right)x^2 + \left(\frac{a^3}{6} + \frac{b}{6}\right)x^3 + o(x^3)$.

גבול סופי מחייב $a = b$ ו־$a^2 = 4$. עבור $a = b = 2$: $L = \frac{8+2}{6} = \frac{5}{3}$.

(עבור $a = b = -2$ מתקבל $L = -\frac{5}{3}$, שאינו בין האפשרויות; לכן התשובה $\frac{5}{3}$.)

תשובה: תשובה א: $L = \frac{5}{3}$.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

הגרפים נחתכים ב־$x = 0, \pm 1$, ובקטע $[-1, 1]$ מתקיים $|x|^3 \leq x^2$. התחום סימטרי.
$V = 2\pi \int_0^1 \left(x^4 - x^6\right) dx = 2\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{4\pi}{35}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{4\pi}{35}$.

שאלה 7 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת: $f'(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot 2x$.

$f'(2) = \frac{\sin 4}{4} \cdot 4 = \sin 4$.

תשובה: תשובה א: $\sin 4$.

שאלה 8 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

תנאי רול: רציפות בקטע הסגור, גזירות בפנים, ושוויון ערכי הקצוות.

$\sin$ רציפה וגזירה ו־$\sin 0 = \sin 2\pi = 0$: מתקיים. ב, ג, ה: ערכי הקצוות שונים. ד: $|x|$ אינה גזירה ב־0.

תשובה: תשובה א.

שאלה 9 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

xe^{x^2} ו־$\sin x \cos^3 x$ אי־זוגיות, ולכן האינטגרל שלהן על $[-2, 2]$ הוא 0.

נשאר $\int_{-2}^{2} 1\,dx = 4$.

תשובה: תשובה א: 4.

שאלה 10 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x} + 2x}{x} = \lim\left(x^2 \sin\frac{1}{x} + 2\right) = 2$.

המשיק: $y = f(0) + f'(0)x = 2x$.

תשובה: תשובה א: $y = 2x$.

שאלה 11 פתרון רשמי

תחום הגדרה: $x \neq \pm\sqrt{3}$; הפונקציה אי־זוגית. $\lim_{x\to -\sqrt{3}^-} f = -\infty$, $\lim_{x\to -\sqrt{3}^+} f = +\infty$, $\lim_{x\to \sqrt{3}^-} f = -\infty$, $\lim_{x\to \sqrt{3}^+} f = +\infty$: אסימפטוטות אנכיות $x = \pm\sqrt{3}$.

$f'(x) = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$; מתאפסת ב־$0, \pm 3$. עולה ב־$(-\infty, -3)$ וב־$(3, \infty)$, יורדת ב־$(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$. מקסימום $(-3, -4.5)$, מינימום $(3, 4.5)$.

(לא בסילבוס הנוכחי) $f''(x) = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$: קעורה ב־$(-\infty, -\sqrt{3})$ וב־$(0, \sqrt{3})$, קמורה ב־$(-\sqrt{3}, 0)$ וב־$(\sqrt{3}, \infty)$. נקודת פיתול $(0, 0)$.

אסימפטוטה משופעת: $k = \lim \frac{x^2}{x^2-3} = 1$, $b = \lim\left(\frac{x^3}{x^2-3} - x\right) = \lim \frac{3x}{x^2-3} = 0$. לכן $y = x$ אסימפטוטה דו־צדדית.

תשובה: מקסימום $(-3, -4.5)$, מינימום $(3, 4.5)$, פיתול $(0, 0)$, אסימפטוטות $x = \pm\sqrt{3}$, $y = x$.

שאלה 12א פתרון רשמי

מהנתון: $f^2(a)+a^2=f^2(b)+b^2$. נגדיר $g(x)=f^2(x)+x^2$.

g רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b) (סכום ומכפלה של כאלה), ו־$g(a)=g(b)$. לפי רול קיימת $c\in(a,b)$ עם $g'(c)=0$.

$g'(x)=2f(x)f'(x)+2x$, ולכן $f(c)f'(c)+c=0$: c פתרון של המשוואה.

תשובה: נובע מרול עבור $g(x)=f^2(x)+x^2$.

שאלה 12ב פתרון רשמי

$3\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$. נגדיר $f(x)=3\sqrt{1+x}$ ונפתח סביב 0: $f(0)=3$, $f'(x)=\frac{3}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f'(0)=\frac{3}{2}$.

$P_1(x)=3+\frac{3}{2}x$, והקירוב: $P_1\left(\frac{4}{9}\right)=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$.

שארית לגרנז׳: $f''(x)=-\frac{3}{4}(1+x)^{-3/2}$, ולכן $\left|R_1\left(\frac{4}{9}\right)\right|=\frac{\frac{3}{4}(1+c)^{-3/2}}{2!}\cdot\frac{16}{81}=\frac{3\cdot16}{8(1+c)^{3/2}\cdot81}<\frac{2}{27}$, כי $0<c<\frac{4}{9}$.

תשובה: $\frac{11}{3}\approx\sqrt{13}$, שגיאה קטנה מ־$\frac{2}{27}$.

תשפ״ה · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **50**

שאלה 1 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

שברים חלקיים: $\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{2x-1}=\frac{2x+4}{(2x-1)(x^2+1)}$.

פונקציה קדומה: $2\ln(2x-1)-\ln(x^2+1)=\ln\frac{(2x-1)^2}{x^2+1}$, השואפת ל־$\ln 4$ כאשר $x\to\infty$.

לכן הערך $\ln 4-\ln\frac{1}{2}=\ln 8=3\ln 2$.

תשובה: תשובה א: $3\ln 2$.

שאלה 2 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

נציב $t=\frac{1}{x}\to 0^+$: הביטוי שווה $\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$.

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$, לכן הגבול $\frac{1}{2}$.

תשובה: תשובה א: 0.5.

שאלה 3 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$g(x)=x^4+3x-13$: $g''=12x^2\geq 0$, ו־$g'=4x^3+3$ מתאפסת רק ב־$x_0=-\sqrt[3]{3/4}$: g יורדת משמאל ל־x_0 ועולה מימינו.

$g(x_0)<g(0)=-13<0$ ו־$g\to\infty$ בשני הכיוונים, לכן יש בדיוק שורש אחד בכל צד של x_0: שני פתרונות.

תשובה: תשובה א.

שאלה 4 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

א: $a_{n_k} \to 0 \iff |a_{n_k}| \to 0$, לכן 0 גבול חלקי של אחת אם״ם של השנייה. נכונה.

ב: $a_n = (-1)^n n$ - $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ללא גבול במובן הרחב. ג: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$. ד: $a_n = n$, $b_n = -n$. ה: $a_n = 2^{-n}$ נותן מנה $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{a_n}$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 5 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$e^{ax^2} = 1 + ax^2 + \frac{a^2x^4}{2} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, $x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$.

המונה: $\left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2$. גבול סופי מחייב $a = \frac{1}{2}$.

אז $L = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.

תשובה: תשובה א: $L = \frac{1}{4}$.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

המשיק: $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$; חיתוך עם ציר x: $B = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

$S_1 = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$ (השטח מתחת לפרבולה בין O ל־C). $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{4}$.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{4}{3}$.

שאלה 7 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת: $f'(x) = e^{(x^2+1)-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - e^{x^2-1} \cdot 1$.

$= e^{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - e^{x^2}e^{-1} = e^{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{e}\right)$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 8 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

לפי רול על f ב־$[-1,1]$: קיימת $c_1 \in (-1,1)$ עם $f'(c_1) = 0$.

לפי רול על f' בקטע $[-1, c_1]$ ($f'(-1) = f'(c_1) = 0$) קיימת $c \in (-1, c_1)$ עם $f''(c) = 0$. א נכונה.

שאר הטענות אינן בהכרח נכונות: למשל $f(x) = -(x^2-1)^2 \leq 0$ אינה מתאפסת בפנים, אינה קבועה, ואינה מקבלת ערכים חיוביים; ו־ג אינה קשורה לנתונים.

תשובה: תשובה א.

שאלה 9 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$\int_1^8 x^{-2/3}dx = \left[3x^{1/3}\right]_1^8 = 3$; $\int_1^8 e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_1^8 = 1-e^{-7}$; $\int_1^8 \frac{3}{x}dx = 3\ln 8 = 9\ln 2$.

סה"כ $9\ln 2 + 1 - e^{-7} - 3 = 9\ln 2 - 2 - e^{-7}$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 10 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\sin\frac{1}{x} - 3 \to -3$, לכן $f'(0) = -3$.

(בנוסף, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} - 3$ עבור $x \neq 0$ אינה רציפה ב־0, ולכן גם $f''(0)$ לא קיימת.)

תשובה: תשובה א: $f'(0) = -3$.

שאלה 11 פתרון רשמי

תחום הגדרה: $x \neq -1$; אין תכונות מיוחדות. $\lim_{x\to -1^{\pm}} f = -\infty$ (המונה שואף ל־-1): אסימפטוטה אנכית $x = -1$.

$f'(x) = -\frac{x(x^2+3x+4)}{(1+x)^3}$ ($x^2+3x+4 > 0$). יורדת ב־$(-\infty,-1)$ וב־$(0,\infty)$, עולה ב־$(-1,0)$. מקסימום $(0,1)$.

(לא בסילבוס הנוכחי) $f''(x) = \frac{2x-4}{(1+x)^4}$: קעורה ב־$(-\infty,-1)$ וב־$(-1,2)$, קמורה ב־$(2,\infty)$. נקודת פיתול $\left(2,-\frac{7}{9}\right)$.

אסימפטוטה משופעת: $k = \lim\frac{f(x)}{x} = 1$, $b = \lim(f(x)+x) = \lim\frac{1+3x+x^2}{(1+x)^2} = -1$. לכן $y = -x+1$ אסימפטוטה דו־צדדית.

תשובה: מקסימום $(0,1)$, פיתול $\left(2,-\frac{7}{9}\right)$, אסימפטוטות $x=-1$ ו־$y=-x+1$.

שאלה 12א פתרון רשמי

$\sin^2(2x) = 4\sin^2 x\cos^2 x$, לכן האינטגרנד שווה $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$.

$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x}$ ו־$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\sin x}$ (הצבות $u=\cos x$, $u=\sin x$).

לכן האינטגרל שווה $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}\right) + C$.

תשובה: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}\right) + C$

שאלה 12ב פתרון רשמי

נסמן $f(x) = \sqrt{x}$, רציפה וגזירה ב־$[2025-d, 2025+d]$. אז $A = f(2025+d) - f(2025)$, $B = f(2025) - f(2025-d)$.

לפי לגרנז': קיימות $c_1 \in (2025-d, 2025)$, $c_2 \in (2025, 2025+d)$ עם $B = d\cdot f'(c_1) = \frac{d}{2\sqrt{c_1}}$ ו־$A = d\cdot f'(c_2) = \frac{d}{2\sqrt{c_2}}$.

$c_1 < 2025 < c_2$, לכן $\frac{1}{\sqrt{c_1}} > \frac{1}{\sqrt{c_2}}$ ו־$B > A$.

דרך נוספת: $A = \frac{d}{\sqrt{2025+d}+\sqrt{2025}}$, $B = \frac{d}{\sqrt{2025}+\sqrt{2025-d}}$, ומכנה A גדול יותר.

תשובה: $B > A$

תשפ"ה · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 54

שאלה 1 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

פירוק לשברים חלקיים: $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$, ולכן פונקציה קדומה היא $\ln\frac{x-3}{x-2}$.

$\int_4^\infty = \lim_{R\to\infty}\left[\ln\frac{x-3}{x-2}\right]_4^R = 0 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$.

תשובה: תשובה א: מתכנס וערכו $\ln 2$.

שאלה 2 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

גבול מהצורה $\frac{0}{0}$. לפי לופיטל: $\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1}$, שוב $\frac{0}{0}$ ב־$x=1$.

לופיטל שוב: המונה נגזר ל־$x^x(\ln x+1)^2 + x^x\cdot\frac{1}{x} \to 1+1=2$, המכנה ל־$-\frac{1}{x^2} \to -1$. לכן הגבול -2.

תשובה: תשובה א: -2.

שאלה 3 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$p(x)=x^3+3x^2+3x+10$ פולינום ממעלה אי־זוגית, ולכן יש לו שורש ממשי ($p\to\pm\infty$ וערך הביניים).

$p'(x)=3(x+1)^2\geq 0$ ומתאפסת רק ב־$x=-1$, לכן p עולה ממש ויש שורש יחיד.

תשובה: תשובה א: פתרון ממשי יחיד.

שאלה 4 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

תת־הסדרה האי־זוגית מונוטונית יורדת ולכן יש לה גבול (סופי או $-\infty$); תת־הסדרה הזוגית עולה ולכן יש לה גבול (סופי או $+\infty$).

כל תת־סדרה של a_n מכילה תת־סדרה שכולה באינדקסים זוגיים או שכולה באינדקסים אי־זוגיים, ולכן כל גבול חלקי הוא אחד משני הגבולות האלה: לכל היותר שני גבולות חלקיים.

שאר הטענות אינן בהכרח נכונות: $a_n=(-1)^n$ אינה מתכנסת ואינה מונוטונית, ו־$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנסת.

תשובה: תשובה א.

שאלה 5 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

פיתוחי מקלורן: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$, $\cos(x^2)=1-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$.

המונה: $(1-a)+(b-1)x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{2}\right)x^4+o(x^4)$. כדי שהגבול יהיה סופי: $a=1$, $b=1$.

אז $L=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

תשובה: תשובה א: $L=\frac{5}{6}$.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$V_x = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$.

$V_y = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = 2\pi [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi^2 - 2\pi$.

$\frac{V_x}{V_y} = \frac{\pi^2/2}{\pi(\pi-2)} = \frac{\pi}{2\pi-4}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{\pi}{2\pi-4}$.

שאלה 7 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$f(x) = -\int_{10}^{x^3} \sqrt{1+t^2}\, dt$. לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת: $f'(x) = -\sqrt{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = -3x^2\sqrt{1+x^6}$.

תשובה: תשובה א.

שאלה 8 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

א: אם $f(x) - (k_1x + b_1) \to 0$ ו־$g(x) - (k_2x + b_2) \to 0$ כאשר $x \to \pm\infty$, אז $f + g - ((k_1+k_2)x + b_1 + b_2) \to 0$. נכונה.

ב: $f = x^2$ (מינימום ב־0) ו־$g = -x^2 + x^3$ (מקסימום ב־0, כי $g = -x^2(1-x) \le 0$ ליד 0): הסכום x^3 ללא קיצון. ג: $f = 1 - x^2$ (מקסימום) ו־$g = 1 + x^2 + x^3$ (מינימום): המכפלה $1 + x^3 - x^4 - x^5$ מתנהגת ליד 0 כמו $1 + x^3$, ללא קיצון.

ד: $f = x^3$ ו־$g = -x^3 + x^4$ ($g'' = -6x + 12x^2$ מחליפה סימן ב־0): הסכום x^4 קמור, ללא פיתול. ה: $f = g = x^3$: x^6 קמורה, אין פיתול ב־0.

תשובה: תשובה א.

שאלה 9 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

הצבה $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$; הגבולות $\frac{1}{2} \to 1$: $\int_{1/2}^{1} \ln u \, du$.

$\int \ln u \, du = u \ln u - u$, ולכן הערך $(1 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (0 - 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$.

תשובה: תשובה א: $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$.

שאלה 10 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

ב־$x \neq 0$ הפונקציה גזירה (כאשר x^α מוגדרת). ב־0: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$, שואף ל־0 אם $\alpha > 1$ ואינו מתכנס אם $\alpha \le 1$. לכן א נכונה, ב, ג, ה שגויות.

ד שגויה: עבור $1 < \alpha \le 2$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$ אינה שואפת ל־0, ולכן f' אינה רציפה ב־0.

תשובה: תשובה א.

שאלה 11 פתרון רשמי

תחום הגדרה: $x \neq -1$. אין זוגיות/אי־זוגיות. $\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = -\infty$, לכן $x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

$f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1)^3}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$. סימן: $+$ ב־$(-\infty,-5)$, $-$ ב־$(-5,-1)$, $+$ ב־$(-1,1)$ ו־$(1,\infty)$. לכן עולה ב־$(-\infty,-5)$ וב־$(-1,\infty)$, יורדת ב־$(-5,-1)$; מקסימום ב־$x=-5$, $f(-5) = -\frac{216}{16} = -13.5$.

(לא בסילבוס הנוכחי) $f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$: קעורה ב־$(-\infty,-1)$ וב־$(-1,1)$, קמורה ב־$(1,\infty)$; נקודת פיתול $(1,0)$.

אסימפטוטה משופעת: $k = \lim \frac{f(x)}{x} = 1$, $b = \lim(f(x)-x) = \lim \frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2} = -5$. לכן $y = x-5$ אסימפטוטה משופעת דו־צדדית.

סקיצה: עולה מ־$-\infty$ לאורך $y=x-5$ עד המקסימום $(-13.5,-5)$, יורדת ל־$-\infty$ ליד $x=-1$, חוזרת מ־$-\infty$ מימין ל־-1 ועולה, עוברת בנקודת הפיתול $(1,0)$ ומתקרבת ל־$y=x-5$.

תשובה: מקסימום $(-13.5,-5)$, פיתול $(1,0)$, אסימפטוטות $x=-1$ ו־$y=x-5$.

שאלה 12א פתרון רשמי

$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ הוא פולינום מקלורן מסדר 3 של $\sin x$.

לפי נוסחת לגרנז׳ לשארית: $\sin x - p_3(x) = R_3(x) = \frac{\sin^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{\sin c}{24}x^4$ עבור $0 < c < x$.

כאשר $0 < x < \pi$ גם $0 < c < \pi$, ולכן $\sin c > 0$ ו־$R_3(x) > 0$, כלומר $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

תשובה: נובע משארית לגרנז׳ של פולינום מקלורן מסדר 3.

שאלה 12ב פתרון רשמי

מעריכים ב־$x = \frac{1}{2}$. לפי שארית לגרנז׳: $\left|e^{1/2} - p_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|$ עבור $0 < c < \frac{1}{2}$.

$e^c < e^{1/2} < 2$, לכן השגיאה קטנה מ־$\frac{1}{2^n(n+1)!} = \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!}$. מספיק לדרוש $2^n(n+1)! > 10^5$.

עבור $n=6$: $2^6 \cdot 7! = 64 \cdot 5040 = 322560 > 10^5$ (ואילו עבור $n=5$: $2^5 \cdot 6! = 23040$). לכן פולינום מסדר $n=6$ מספיק.

הערה: בפתרון הרשמי נכתב בטעות $64 \cdot 4900$ במקום $64 \cdot 5040$; המסקנה זהה.

תשובה: $n = 6$

תשפ״ה · סמסטר א׳ · מבחן לדוגמה

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 57

שאלה 1 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ה.

עבור $x \geq e$: $0 \geq \frac{1}{x^{1/3}} \geq \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \geq 0$, ו־$\int^{\infty} x^{-1/3}dx$ מתבדר (חזקה $\frac{1}{3} \leq 1$).

לפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתבדר (לחלופין: פונקציה קדומה $\frac{3}{2}x^{2/3}\ln x - \frac{9}{4}x^{2/3} \to \infty$).

תשובה: תשובה ה: מתבדר.

שאלה 2 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ד.

גבול מהצורה 1^∞. נציב $t=\frac{1}{x}\to 0^+$: הביטוי שווה $e^{\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}$.

לפי לופיטל: $\lim \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}=1$. לכן $\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}$ הגבול e.

תשובה: תשובה ד: e.

שאלה 3 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ב.

נסמן $g(x)=x^2+e^{-x^2}-3$, פונקציה זוגית. $g'(x)=2x\left(1-e^{-x^2}\right)$, חיובית עבור $x>0$: g עולה ממש ב־$[0,\infty)$.

$g(0)=-2<0$ ו־$g\to\infty$, לכן ב־$(0,\infty)$ יש שורש יחיד. מזוגיות יש שורש יחיד גם ב־$(-\infty,0)$, ו־0 אינו שורש: בדיוק שני פתרונות.

תשובה: תשובה ב.

שאלה 4 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ג.

$a_n\not\to\infty$ פירושו: קיים M כך שלכל N יש $n>N$ עם $a_n\le M$. לכן יש אינסוף אינדקסים עם $a_n\le M$, והם יוצרים תת־סדרה חסומה מלעיל. ג נכונה.

שאר הטענות שגויות: $a_n=-n$ אינה בעלת תת־סדרה מתכנסת; $a_n=n$ עבור n זוגי ו־0 עבור אי־זוגי אינה חסומה מלעיל, גבולה העליון ∞ ואינה יורדת.

תשובה: תשובה ג.

שאלה 5 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$.

המכפלה: $1+0\cdot x^2+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)x^4+o(x^4)=1-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)$.

לכן המונה $\frac{1}{3}x^4+o(x^4)$ והגבול $\frac{1}{3}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{1}{3}$.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

נקודות החיתוך: $x=0,1$; בקטע $[0,1]$ מתקיים $\sqrt{x}\ge x^2$.

$V=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{3\pi}{10}$.

שאלה 7 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: א.

גבול $\frac{0}{0}$. לפי לופיטל והמשפט היסודי: הנגזרת של המונה היא $5x^4\cdot\sin(x^{15})-4x^3\cdot\sin(x^{12})$, ושל המכנה $16x^{15}$.

$\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x^{12}}{x^{12}}\to\frac{1}{4}$, ו־$\frac{4x^3\sin(x^{12})}{16x^{15}}-\frac{5x^4\sin(x^{15})}{16x^{15}}\sim\frac{5}{16}x^4\to 0$. לכן הגבול $\frac{1}{4}$.

תשובה: תשובה א: $\frac{1}{4}$.

שאלה 8 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ד.

התנאי אומר ש־f חד־חד־ערכית בקטע. פונקציה רציפה וחח"ע בקטע היא מונוטונית ממש (אחרת, לפי משפט ערך הביניים, ערך כלשהו היה מתקבל פעמיים). לכן ד נכונה.

א שגויה: $f(x)=x^3$ ב־$[-1,1]$, $f'(0)=0$. ב שגויה: לאותה פונקציה יש פיתול ב־0. ג שגויה: לפי ויירשטראס יש מקסימום ומינימום מוחלטים. ה שגויה: $f(x)=2x$.

תשובה: תשובה ד.

שאלה 9 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ג.

$f'(x)=\frac{x^3}{4}-\frac{1}{x^3}$, ולכן $1+f'(x)^2=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1}{x^3}\right)^2$.

בקטע $[-2,-1]$ הביטוי $\frac{x^3}{4}+\frac{1}{x^3}$ שלילי, לכן

$L=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{x^3}{4}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\left[-\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1}=\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right)-\left(-1+\frac{1}{8}\right)=\frac{21}{16}$.

תשובה: תשובה ג: $\frac{21}{16}$.

שאלה 10 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ג.

$f(x)=x^2|x|$. $f'(x)=3x|x|$ (גם ב־0, כי $\frac{|x|^3}{x}\to 0$), $f''(x)=6|x|$ (גם ב־0, כי $\frac{3x|x|}{x}=3|x|\to 0$).

$f''=6|x|$ אינה גזירה ב־0 (הנגזרות החד־צדדיות ± 6). לכן $n=2$.

תשובה: תשובה ג: $n=2$.

שאלה 11 פתרון רשמי

תחום הגדרה: $x\neq\sqrt[3]{2}$; אין תכונות מיוחדות. $\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-}f=-\infty$, $\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^+}f=+\infty$: אסימפטוטה אנכית $x=\sqrt[3]{2}$.

$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-2)-3x^2\cdot x^4}{(x^3-2)^2}=\frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$; מתאפסת ב־$x=0,2$. עולה ב־$(-\infty,0)$ וב־$(2,\infty)$, יורדת ב־$(0,\sqrt[3]{2})$ וב־$(\sqrt[3]{2},2)$.

מקסימום $(0,0)$, מינימום $\left(2,2\frac{2}{3}\right)=\left(2,\frac{16}{6}\right)$.

(לא בסילבוס הנוכחי) $f''(x)=\frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$: מתאפסת ב־$0$ וב־$-\sqrt[3]{4}$. קמורה ב־$(-\infty,-\sqrt[3]{4})$ וב־$(\sqrt[3]{2},\infty)$, קעורה ב־$(-\sqrt[3]{4},0)$ וב־$(0,\sqrt[3]{2})$. נקודת פיתול ב־$x=-\sqrt[3]{4}\approx -1.06$, $f(-\sqrt[3]{4})$ (ב־0 אין החלפת קמירות).

אסימפטוטה משופעת: $k=\lim\frac{x^4}{x(x^3-2)}=1$, $b=\lim\left(\frac{x^4}{x^3-2}-x\right)=\lim\frac{2x}{x^3-2}=0$. לכן $y=x$ אסימפטוטה דו־צדדית.

תשובה: מקסימום $(0,0)$, מינימום $\left(2,\frac{8}{3}\right)$, פיתול ב־$x=-\sqrt[3]{4}$, אסימפטוטות $x=\sqrt[3]{2}$ ו־$y=x$.

שאלה 12א פתרון רשמי

נסמן $f(x)=\operatorname{arccot} x$; אז $a=f(2027)-f(2025)$, $b=f(2025)-f(2023)$, ו־$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$.

לפי לגרנז׳ בקטעים $[2025,2027]$ ו־$[2023,2025]$: קיימות $c_2\in(2025,2027)$, $c_1\in(2023,2025)$ עם $\frac{a}{2}=f'(c_2)$, $\frac{b}{2}=f'(c_1)$.

$-\frac{1}{1+c_1^2}<-\frac{1}{1+c_2^2}\Rightarrow \frac{1}{1+c_1^2}>\frac{1}{1+c_2^2}\Rightarrow c_1<c_2$, כלומר $f'(c_1)<f'(c_2)$. לכן $a=2f'(c_2)>2f'(c_1)=b$.

תשובה: $a>b$

שאלה 12ב פתרון רשמי

שארית לגרנז׳ בנקודה $x=\frac{1}{4}$: $\left|R_n\left(\frac{1}{4}\right)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right|\le\frac{1}{(n+1)!\,4^{n+1}}$, כי כל נגזרות $\sin$ חסומות ב־1.

מספיק $4^{n+1}(n+1)!\ge 10^4$. עבור $n=3$: $4^4\cdot 4!=6144<10^4$; עבור $n=4$: $5!\cdot 4^5=122880>10^4$. לכן $n=4$ מספיק.

תשובה: $n=4$

תשפ״ד · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 60

שאלה 1א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של 1^∞, ולכן אין שימוש מיידי באריתמטיקה של גבולות; נקרב לגבול המגדיר את e. נכתוב

$$\frac{5n^2+6}{5n^2+7}=1-\frac{1}{5n^2+7}.$$

לכן

$$\left(1-\frac{1}{5n^2+7}\right)^{15n^2+1}=\left[\left(1-\frac{1}{5n^2+7}\right)^{5n^2+7}\right]^{\frac{15n^2+1}{5n^2+7}}.$$

הבסיס שואף ל־e^{-1} והמעריך $\frac{15n^2+1}{5n^2+7}\to 3$, לכן, מרציפות פונקציית החזקה, הגבול הוא e^{-3}.

תשובה: e^{-3}

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפצל את הסדרה לתת־סדרות שבהן הקוסינוס קבוע. הביטוי $\cos\frac{\pi n}{2}$ מחזורי במחזור 4: שווה 0 כאשר n אי־זוגי, -1 כאשר $n=4k+2$, ו־1 כאשר $n=4k$.

לכן $a_{2k+1}=7\to 7$, וגם

$$a_{4k+2}=7-\frac{4k+2}{4k+3}\to 6,$$

וגם

$$a_{4k}=7+\frac{4k}{4k+1}\to 8.$$

שלוש תת־הסדרות מכסות את כל האיברים, ולכן כל תת־סדרה מתכנסת שואפת לאחד מהערכים האלה.

תשובה: הגבולות החלקיים: $6,7,8$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את שני הגבולות החד־צדדיים ב־0. משמאל זהו גבול מהצורה 1^{∞}, ומתקיים

$$\lim_{x\to 0^-}\left(1+(a^2-9)x\right)^{1/x}=e^{a^2-9}.$$

מימין: מתקיים

$$x^{-a/x}=e^{-a\frac{\ln x}{x}}$$

ו־$\frac{\ln x}{x}\to-\infty$ כאשר $x\to 0^+$. לכן: אם $a>0$ הגבול הוא ∞; אם $a=0$ הגבול הוא $1+1=2$; אם $a<0$ הגבול הוא $1+0=1$.

עבור $a>0$ אין גבול סופי. עבור $a=0$ נדרש $e^{-9}=2$, סתירה. עבור $a<0$ נדרש $e^{a^2-9}=1$, כלומר $a^2=9$, ולכן $a=-3$, ואז $b=1$.

בדיקה: עבור $a=-3$, $f(x)=1$ לכל $x<0$ ו־$f(x)=1+x^{3/x}$ רציפה עבור $x>0$ כסכום והרכבה של פונקציות רציפות, ושני הגבולות החד־צדדיים ב־0 שווים $b=1$.

תשובה: כן: $a=-3,\ b=1$ (ואלה הערכים היחידים).

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

משפט לגרנז׳: אם f רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b), אז קיימת $c\in(a,b)$ עם

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

אם $x=y$, השוויון מתקיים לכל d. אחרת, בלי הגבלת הכלליות $y<x$; הפונקציה $\sin$ רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$, ולכן לפי לגרנז׳ בקטע $[y,x]$ קיימת $d\in(y,x)$ עם

$$\sin x-\sin y=\cos(d)(x-y).$$

תשובה: נובע ממשפט לגרנז׳ עבור $\sin$ בקטע שבין x ל־y.

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה רציפות ב־1, ואחר כך נחשב נגזרות חד־צדדיות. מתקיים $f(1)=0$ ו־$\lim_{x\to 1^+}(|x|-1)=0$, כי $|x|-1$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהפרש של פונקציות רציפות; לכן f רציפה ב־1.

הנגזרת השמאלית היא

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x-1}{4}(x+1)^2-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)^2}{4}=1.$$

נגזרת ימנית: עבור $x>1$, $f(x)=x-1$, ולכן

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

הנגזרות החד־צדדיות שוות, לכן f גזירה ב־1 ו־$f'(1)=1$.

תשובה: כן, $f'(1)=1$.

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק את האינטגרנד: מתקיים

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}-\cos x.$$

ידוע שמתקיים

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|+C$$

(אפשר לבדוק בגזירה, או להכפיל ולחלק ב־$\frac{1}{\cos x}+\tan x$).

לכן

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|-\sin x+C.$$

תשובה: $\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|-\sin x+C$

תשפ״ד · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 61

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח קיום בעזרת משפט ערך הביניים ויחידות בעזרת הנגזרת. נגדיר

$$g(x) = \frac{x}{2} + \arctan x - \alpha,$$

וזו פונקציה רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות כאלה.

קיום: מתקיים $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ ו־$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (כי $\arctan$ חסומה). לכן יש $a < b$ עם $g(a) < 0 < g(b)$, ולפי משפט ערך הביניים יש $c \in (a,b)$ עם $g(c) = 0$.

יחידות: מתקיים

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} > 0$$

לכל x, ולכן g עולה ממש ואינה יכולה להתאפס פעמיים (לחלופין: שני שורשים היו נותנים לפי רול נקודה עם $g' = 0$).

תשובה: לכל α יש למשוואה פתרון אחד ויחיד.

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

משפט לגרנז׳: אם f רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b), אז קיימת $c \in (a,b)$ כך שמתקיים

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

יהי $x > 0$ (שם הביטוי מוגדר). הפונקציה $f(t) = \ln t$ רציפה בקטע $[x, x+1]$, כי היא רציפה בכל $(0,\infty)$, וגזירה ב־$(x, x+1)$.

נפעיל את המשפט על $f(t) = \ln t$ בקטע $[x, x+1]$: קיימת $c \in (x, x+1)$ עם

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = \frac{1}{c}.$$

מכיוון ש־$x < c < x+1$ נקבל

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x},$$

ומכאן אי־השוויון המבוקש (אפילו בחריפות).

תשובה: נובע מלגרנז׳ על $\ln t$ בקטע $[x, x+1]$, $x > 0$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהסדרה יורדת וחסומה מלרע. באינדוקציה $a_n > 0$ לכל n. לפי אי־שוויון הממוצעים

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3},$$

וגם $a_1 = 2 > \sqrt{3}$. לכן הסדרה חסומה מלרע ע"י $\sqrt{3}$.

מתקיים

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

כי $a_n \geq \sqrt{3}$. לכן הסדרה יורדת.

סדרה יורדת וחסומה מלרע מתכנסת; נסמן $L = \lim a_n \geq \sqrt{3} > 0$. מעבר לגבול ביחסי הנסיגה:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right),$$

כלומר $L^2 = 3$, ולכן $L = \sqrt{3}$.

תשובה: $\lim a_n = \sqrt{3}$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $0 \cdot \infty$, ולכן נעבור למשתנה חדש. נציב $t = \frac{1}{x} \to 0^+$:

$$x\left(5^{1/x} - 1\right) = \frac{5^t - 1}{t} = \frac{e^{t\ln 5} - 1}{t}.$$

לפי לופיטל (או הגבול היסודי $\frac{e^u - 1}{u} \to 1$):

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t\ln 5} - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \ln 5 \cdot e^{t\ln 5} = \ln 5.$$

בגבול האחרון הצבנו $t = 0$, כי $e^{t\ln 5}$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות.

תשובה: $\ln 5$

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק רציפות בנפרד עבור $x \neq 0$ ובנקודה $x = 0$. עבור $x \neq 0$, f היא הרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

בנקודה $x = 0$: כאשר $x \to 0$, $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$ ולכן $e^{-1/x^2} \to 0$. לכן

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 0 \cdot 0 = 0 = f(0).$$

תשובה: כן, f רציפה בכל $\mathbb{R}$.

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נטפל בנפרד בנקודות $x \neq 0$ ובנקודה $x = 0$. עבור $x \neq 0$ לפי כללי הגזירה:

$$f'(x) = 1 + e^{-1/x^2} + x \cdot e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = 1 + e^{-1/x^2}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right).$$

בנקודה $x = 0$ לפי ההגדרה:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + xe^{-1/x^2}}{x} = 1 + e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

לכן $f'(0) = 1$.

תשובה: f גזירה בכל $\mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + e^{-1/x^2}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$ עבור $x \neq 0$, ו־$f'(0) = 1$.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב בהצבה $t = \ln x$, $x = e^t$, $dx = e^t\,dt$; הגבולות $1 \to 0$, $e \to 1$, ונקבל

$$I = \int_0^1 e^t \sin t\,dt.$$

נבצע אינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\int e^t \sin t\,dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t\,dt = e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t\,dt,$$

ולכן

$$\int e^t \sin t\,dt = \frac{e^t(\sin t - \cos t)}{2} + C.$$

האינטגרנד $e^t \sin t$ רציף ב־$[0, 1]$ כמכפלה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי

$$I = \left[\frac{e^t(\sin t - \cos t)}{2}\right]_0^1 = \frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{e(\sin 1 - \cos 1) + 1}{2}.$$

תשובה: $\frac{e(\sin 1 - \cos 1) + 1}{2} \approx 0.909$

תשפ"ג · סמסטר ב' · מועד ג'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 62

שאלה 1ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחסום תחילה את הביטוי מלמעלה. עבור $n \geq 4$: $n^2 \geq 16 > 10$, ולכן $n^2 + 10 < 2n^2$; וגם $n^3 \geq 64 > 20$, ולכן $n^3 - 10 > \frac{n^3}{2} > 0$.

לכן עבור $n \geq 4$:

$$\left|\frac{n^2 + 10}{n^3 - 10}\right| < \frac{2n^2}{n^3/2} = \frac{4}{n}.$$

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $N = \max\left(4, \frac{4}{\varepsilon}\right)$. לכל $n > N$:

$$\left|\frac{n^2 + 10}{n^3 - 10} - 0\right| < \frac{4}{n} < \varepsilon.$$

תשובה: $N = \max(4, \frac{4}{\varepsilon})$ מתאים, כי $\frac{n^2+10}{n^3-10} < \frac{4}{n}$ עבור $n \geq 4$.

שאלה 2ב נבדק על ידי צוות הקורס

הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית: $f(x)=x$ (עולה) ו־$g(x)=-x$ (יורדת) על $\mathbb{R}$.

המכפלה היא $f(x)g(x)=-x^2$, ומתקיים

$$-(-1)^2=-1<0=-(0)^2$$

אבל

$$-(0)^2=0>-1=-(1)^2.$$

כלומר המכפלה עולה ב־$(-\infty,0]$ ויורדת ב־$[0,\infty)$, ואינה מונוטונית עולה.

(דוגמה פשוטה נוספת: $f(x)=x,\ g(x)\equiv -1$ נותנת $fg=-x$, יורדת.)

תשובה: הטענה לא נכונה; למשל $f(x)=x,\ g(x)=-x$ נותנות $fg=-x^2$.

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק היכן f מוגדרת ורציפה, ואחר כך נחשב גבולות חד־צדדיים. **תחום:** הענף $x<2$ מוגדר רק עבור $x>1$ (בגלל $\ln(x-1)$); המכנה $e^{t}-e^{-t}$ עם $t=x-2$ מתאפס רק ב־$t=0$. בענף $x\geq 2$ הביטוי ב־$x=2$ עצמו אינו מוגדר (מעריך $\frac{1}{0}$). לכן f מוגדרת ב־$(1,2)\cup(2,\infty)$ ורציפה שם כהרכבה של פונקציות אלמנטריות; אין היא רציפה "על כל הישר".

גבול משמאל ל־2: נציב $t=x-2\to 0^{-}$:

$$\frac{\ln(1+t)}{e^{t}-e^{-t}}=\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\frac{1}{\frac{e^{t}-1}{t}+\frac{e^{-t}-1}{-t}}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

לפי הגבולות היסודיים $\frac{\ln(1+t)}{t}\to 1,\ \frac{e^{t}-1}{t}\to 1$.

גבול מימין ל־2: עם $t\to 0^{+}$ נכתוב את הבסיס כ־$1+u(t)$, כאשר

$$u=\frac{(2^{t}-1)+(8^{t}-1)+(4^{t}-1)}{3}\to 0.$$

לפי $\frac{a^{t}-1}{t}\to\ln a$:

$$\frac{u}{t}\to\frac{\ln 2+\ln 8+\ln 4}{3}=\frac{\ln 64}{3}=2\ln 2.$$

לכן, מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$ ושל e^{x} ב־$\mathbb{R}$, נקבל

$$(1+u)^{1/t}=\Big[(1+u)^{1/u}\Big]^{u/t}\to e^{2\ln 2}=4.$$

מסקנה: בנקודה $x=2$ הגבולות החד־צדדיים סופיים ושונים ($4\neq\frac{1}{2}$) — אי־רציפות מסוג ראשון (קפיצה). בנקודה $x=1$ (קצה התחום) $\lim_{x\to 1^{+}}f(x)=+\infty$ כי $\ln(x-1)\to-\infty$ והמכנה $e^{-1}-e<0$ — אם מתייחסים לנקודה זו, זו אי־רציפות מסוג שני. עבור $x<1$ הפונקציה אינה מוגדרת.

תשובה: f רציפה ב־$(1,2)\cup(2,\infty)$; ב־$x=2$ קפיצה ($f(2^{+})=4,\ f(2^{-})=\frac{1}{2}$); ב־$x=1$ גבול מימין $+\infty$ (מסוג שני); עבור $x\leq 1$ לא מוגדרת.

שאלה 4ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט לגרנז׳. יהי $x > 1$; הפונקציה $g(t) = e^t$ רציפה ב־$[1, x]$ (כי e^t רציפה בכל $\mathbb{R}$) וגזירה ב־$(1, x)$, עם $g'(t) = e^t$.

לפי משפט לגרנז׳ קיימת $c \in (1, x)$ עם

$$e^x - e = e^c(x - 1).$$

מאחר ש־$c > 1$: $e^c > e$, ולכן

$$e^x - e > e(x - 1) = ex - e,$$

כלומר $e^x > ex$, ובפרט $e^x \geq ex$.

תשובה: לגרנז׳ על e^t בקטע $[1, x]$: $e^x - e = e^c(x - 1) \geq e(x - 1)$.

שאלה 5ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק את האינטגרנד: מתקיים

$$\frac{1}{e^x + 5} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{e^x}{e^x + 5}\right).$$

לכן

$$\int \frac{dx}{e^x + 5} = \frac{1}{5}(x - \ln(e^x + 5)) + C.$$

האינטגרנד רציף ב־$[0, e]$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס, ולכן לפי המשפט היסודי

$$\int_0^e = \frac{1}{5}(e - \ln(e^e + 5) + \ln 6) \approx 0.3013.$$

תשובה: $\frac{1}{5}(e + \ln 6 - \ln(e^e + 5))$

תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 63

שאלה 1א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הגדרה: נאמר ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

הוכחה: נחסום את הביטוי:

$$\left|\frac{2n}{n^3 + 1} - 0\right| = \frac{2n}{n^3 + 1} < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $N > \frac{2}{\varepsilon}$. אז לכל $n > N$:

$$\left|\frac{2n}{n^3 + 1}\right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

תשובה: $N > \frac{2}{\varepsilon}$ מתאים, כי $\frac{2n}{n^3+1} < \frac{2}{n}$.

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

עיקרון קושי: סדרה (x_n) מתכנסת אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m > n > N$ מתקיים $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

עבור $m > n$:

$$|x_m - x_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

יהי $\varepsilon > 0$; נבחר $N > \frac{1}{\varepsilon}$. לכל $m > n > N$:

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

לכן הסדרה קושי, ולפי העיקרון היא מתכנסת.

תשובה: $|x_m - x_n| < \frac{1}{n}$ (סכום טלסקופי), ולכן הסדרה קושי ומתכנסת.

שאלה 2א

נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה את תחום ההגדרה: דרוש

$$2 + 3x - x^2 \geq 0 \iff x^2 - 3x - 2 \leq 0.$$

שורשי $x^2 - 3x - 2$ הם $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, ולכן התחום $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right]$.

הביטוי

$$2 + 3x - x^2 = \frac{17}{4} - \left(x - \frac{3}{2} \right)^2$$

הוא פולינום, ולכן רציף ב־$\mathbb{R}$. הוא מקבל בתחום את כל הערכים ב־$\left[0, \frac{17}{4}\right]$ (מקסימום ב־$x = \frac{3}{2}$, אפס בקצוות, ורציפות).

לכן התמונה היא $\left[0, \frac{\sqrt{17}}{2}\right]$.

תשובה: תחום $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right]$, תמונה $\left[0, \frac{\sqrt{17}}{2}\right]$.

שאלה 2ב

נבדק על ידי צוות הקורס

הפונקציה $\cos$ מחזורית עם מחזור 2π.

נחפש $T > 0$ כך ש־$f(x+T) = f(x)$ לכל x. מתקיים

$$\cos \frac{\pi(x+T)}{4} = \cos\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi T}{4} \right),$$

וזה שווה ל־$\cos \frac{\pi x}{4}$ לכל x כאשר, למשל, $\frac{\pi T}{4} = 2\pi$.

לכן f מחזורית, ו־$T = 8$ הוא מחזור שלה.

תשובה: מחזורית, ו־$T = 8$ הוא מחזור שלה.

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק אם הגבול של f ב־$\frac{\pi}{3}$ קיים; זהו מקרה של $\frac{0}{0}$. נציב $t = x - \frac{\pi}{3} \to 0$, ומתקיים

$$1 - 2\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right) = 1 - \cos t + \sqrt{3}\sin t.$$

נחלק ב־t:

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t + \sqrt{3}\sin t} = \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{1-\cos t}{t} + \sqrt{3}\frac{\sin t}{t}} \to \frac{1}{0 + \sqrt{3}}.$$

לכן הגבול הוא $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ו־f רציפה ב־$\frac{\pi}{3}$ בדיוק כאשר

$$K = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

תשובה: כן, $K = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור הידועים. מתקיים

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right).$$

עם $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ נקבל

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \dots = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + \dots = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \dots.$$

לכן $-\ln\cos x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \dots$, ומכאן

$$f(x) = -2x + \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{12} + \dots.$$

לבדיקה: $f(0) = 0$, $f'(0) = -2$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 6$. לכן שלושת האיברים הראשונים (השונים מאפס) הם

$$-2x + \frac{x^2}{2} + x^3.$$

תשובה: $-2x + \frac{x^2}{2} + x^3$

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט היסודי ובכלל השרשרת. הפונקציה $g(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ רציפה עבור $t > 0$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס; לכן F מוגדרת עבור $x > 0$ (כך ש־$x^3 > 0$).

לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת:

$$F'(x) = g(x^3)\cdot(x^3)' = \frac{\ln(x^3)}{x^6}\cdot 3x^2.$$

לאחר צמצום נקבל

$$F'(x) = \frac{9\ln x}{x^4}.$$

תשובה: $F'(x) = \frac{3\ln(x^3)}{x^4} = \frac{9\ln x}{x^4}$, $x > 0$.

שאלה 25ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נציב $u=\sin^6 x$, $du=6\sin^5 x\cos x\,dx$, ו־$\sin^{12}x=u^2$.

נקבל

$$\int \frac{\cos x\sin^5 x}{\sin^{12}x+4}dx=\frac{1}{6}\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}+C.$$

התוצאה:

$$\frac{1}{12}\arctan\left(\frac{\sin^6 x}{2}\right)+C.$$

תשובה: $\frac{1}{12}\arctan\left(\frac{\sin^6 x}{2}\right)+C$

תשפ״ג · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 65

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. הפונקציה f זוגית:

$$f(-1)=\cos(-\frac{\pi}{2})=0=f(1),$$

ולכן אינה חח״ע.

היא על $f:[0,1]$ רציפה ב־$[-1,1]$ כהרכבה של פונקציות רציפות, $f(0)=1, f(1)=0$, ולפי משפט ערך הביניים מקבלת כל ערך ב־$[0,1]$; וכן $\frac{\pi x}{2}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ולכן $f\geq 0$.

ב. מאחר שאינה חח״ע, אין לה הפוכה בכל $[-1,1]$. בקטע $[0,1]$ הארגומנט $\frac{\pi x}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ו־$\cos$ יורדת ממש שם, כך ש־$f:[0,1]\to[0,1]$ הפיכה.

נחלץ את x מ־$y=\cos\frac{\pi x}{2}$ עם $\frac{\pi x}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ונקבל $x=\frac{2}{\pi}\arccos y$. כלומר

$$f^{-1}(x)=\frac{2}{\pi}\arccos x,$$

כאשר $f^{-1}:[0,1]\to[0,1]$. (לחלופין, בקטע $[-1,0]$: $f^{-1}(x)=-\frac{2}{\pi}\arccos x$.)

ג. הפונקציה הנתונה מוגדרת רק על הקטע החסום $[-1,1]$; פונקציה מחזורית עם מחזור $T>0$ מחייבת ש־$x+T$ יהיה בתחום לכל x בתחום, וזה לא מתקיים עבור $x=1$. לכן היא אינה מחזורית.

(אם מתייחסים לנוסחה $\cos\frac{\pi x}{2}$ על כל $\mathbb{R}$, המחזור הוא $T=\frac{2\pi}{\pi/2}=4$.)

תשובה: לא חח״ע, כן על; הפיכה על $[0,1]$ עם $f^{-1}(x)=\frac{2}{\pi}\arccos x$; לא מחזורית בתחום $[-1,1]$ (הנוסחה על $\mathbb{R}$ מחזורית עם מחזור 4).

שאלה 2א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפריד בין האיברים הזוגיים לאי־זוגיים. עבור n זוגי:

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2},$$

יורדת ושואפת ל־$\frac{3}{2}$; האיבר הגדול ביותר $a_2=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$.

עבור n אי־זוגי:

$$a_n=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2},$$

עולה ושואפת ל־$\frac{1}{2}$; האיבר הקטן ביותר $a_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.

כל איבר שייך לאחת משתי תת־הסדרות, ולכן הגבולות החלקיים הם $\frac{1}{2}$ ו־$\frac{3}{2}$ בלבד.

כל האיברים האי־זוגיים נמצאים ב־$[0,\frac{1}{2})$ וכל הזוגיים ב־$[\frac{3}{2},\frac{11}{6}]$. לכן $\max=\sup=\frac{11}{6}$ (מתקבל ב־$n=2$) ו־$\min=\inf=0$ (מתקבל ב־$n=1$).

תשובה: גבולות חלקיים $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$; $\sup=\max=\frac{11}{6}$, $\inf=\min=0$.

שאלה 2ב נבדק על ידי צוות הקורס

כן, למשל $a_n = 111^n$.

אכן מתקיים $111^n \to \infty$ ו־$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 111$ לכל n.

תשובה: כן, למשל $a_n = 111^n$.

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את הגבול ב־$x = 1$ ונשווה ל־$f(1)$. במכנה משותף,

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x},$$

גבול מסוג $\frac{0}{0}$ כאשר $x \to 1$.

נציב $t = x - 1 \to 0$ ונשתמש בטיילור $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ המונה:

$$t - \ln(1+t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

המכנה

$$t\ln(1+t) = t^2 + o(t^2).$$

לכן $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ (אפשר גם בלופיטל פעמיים).

הגבול קיים וסופי אך $f(1) = 2 \neq \frac{1}{2}$: f אינה רציפה ב־$x = 1$, ואי־הרציפות סליקה.

תשובה: $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2} \neq 2$: אי־רציפות סליקה.

שאלה 4ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נכתוב את האינטגרנד בצורה

$$\frac{1}{e^x + 1} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

לכן

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = x - \ln(e^x + 1) + C$$

(כי $(\ln(e^x+1))' = \frac{e^x}{e^x+1}$).

האינטגרנד רציף ב־$\mathbb{R}$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס, ולכן לפי המשפט היסודי

$$\left[x - \ln(e^x+1)\right]_2^3 = 1 - \ln\frac{e^3+1}{e^2+1} \approx 0.0783.$$

תשובה: $1 - \ln\frac{e^3+1}{e^2+1}$

שאלה 25ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נזהה כאן סכום רימן. האיבר $k=0$ הוא $\tan 0=0$, ולכן הסכום הוא

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

עם $g(x)=\tan\frac{\pi x}{4}$ — סכום רימן של g על $[0,1]$ בחלוקה שווה.

הפונקציה g רציפה ב־$[0,1]$, כי $\tan$ רציפה ב־$[0,\frac{\pi}{4}]$, ולכן אינטגרבילית, והגבול הוא

$$\int_0^1 \tan\frac{\pi x}{4}\,dx.$$

נחשב:

$$\int \tan\frac{\pi x}{4}dx=-\frac{4}{\pi}\ln\cos\frac{\pi x}{4}+C,$$

ולכן

$$\int_0^1 = -\frac{4}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{\pi}.$$

תשובה: $\frac{2\ln 2}{\pi}$

תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 67

שאלה 1

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נגדיר פונקציית עזר $g(x)=f(x)+x^2$ ונפעיל עליה את משפט רול. הפונקציה g רציפה ב־$[0,1]$ וגזירה ב־$(0,1)$ כסכום של פונקציות כאלה, ו־$g'(x)=f'(x)+2x$.

מתקיים $g(0)=0+0=0$ ו־$g(1)=-1+1=0$.

משפט רול: פונקציה רציפה ב־$[a,b]$, גזירה ב־(a,b) עם $g(a)=g(b)$ — קיימת $c\in(a,b)$ עם $g'(c)=0$.

לכן קיימת $c\in(0,1)$ עם $f'(c)+2c=0$.

תשובה: לפי משפט רול עבור $g(x)=f(x)+x^2$.

שאלה 2

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח בעזרת משפט ערך הביניים. יהי $y\in\mathbb{R}$. צריך למצוא c עם $f(c)=y$.

מהנתון $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ (לפי ההגדרה, עם $M=y$) קיים b כך ש־$f(b)>y$. באופן דומה, מהנתון $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ קיים $a<b$ כך ש־$f(a)<y$ (אפשר לבחור a קטן כרצוננו).

הפונקציה f רציפה ב־$[a,b]$, כי לפי הנתון היא רציפה בכל $\mathbb{R}$, ו־$f(a)<y<f(b)$. לפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in(a,b)$ עם $f(c)=y$.

מאחר ש־y שרירותי, f היא על.

תשובה: לכל y מוצאים $a<b$ עם $f(a)<y<f(b)$ ומפעילים את משפט ערך הביניים.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נשתמש בנוסחאות לשיפוע ולחיתוך של אסימפטוטה משופעת. שיפוע:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\left(\sqrt{a+\frac{1}{x^2}}+\sin\frac{b}{x}\right)=\sqrt{a},$$

מרציפות השורש והסינוס. לכן $\sqrt{a}=2$, כלומר $a=4$.

מתקיים

$$x\sin\frac{b}{x}=b\cdot\frac{\sin(b/x)}{b/x}\to b.$$

חיתוך:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)+b=\lim\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}+b=b.$$

לכן $b=2$.

תשובה: תשובה א: $a=4,\ b=2$.

שאלה 4 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

נחלק מונה ומכנה ב־n:

$$\frac{3n+2\arctan n}{\sqrt{4n^2+5n+6}}=\frac{3+\frac{2\arctan n}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}}.$$

הסדרה $2\arctan n$ חסומה ($|2\arctan n|<\pi$) והסדרה $\frac{1}{n}$ שואפת לאפס, ולכן לפי משפט "אפסה כפול חסומה" מתקיים $\frac{2\arctan n}{n}\to 0$.

מרציפות פונקציית השורש ב־$[0,\infty)$ המכנה שואף ל־$\sqrt{4}=2$, ולכן הגבול הוא $\frac{3}{2}$.

תשובה: תשובה ד: $\frac{3}{2}$.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

נשתמש בנוסחת נפח גוף סיבוב:

$$V=\pi\int_0^{\pi/2}f(x)^2\,dx=\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2x\sin x\,dx.$$

האינטגרנד רציף ב־$[0,\frac{\pi}{2}]$ כמכפלה של פונקציות רציפות. הצבה $u=\cos x,\ du=-\sin x\,dx$:

$$\pi\int_0^1u^2\,du=\frac{\pi}{3}.$$

תשובה: תשובה ד: $\frac{\pi}{3}$.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

לפי כלל השרשרת,

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^4}}$$

(הביטוי מוגדר ליד $x=1$ כי $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$).

נציב $x=1$:

$$f'(1) = 2e + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1/4}} = 2e + 2\sqrt{3}.$$

תשובה: תשובה א: $f'(1) = 2e + 2\sqrt{3}$.

שאלה 7 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נחשב את הגבולות החד־צדדיים ב־0. כאשר $x \to 0^+$ מתקיים $1 \le \sin\frac{1}{x} + 2 \le 3$, לכן

$$0 < f(x) \le 3x \to 0,$$

כלומר הגבול מימין 0.

כאשר $x \to 0^-$: $\sin x + 2 \to 2$ מרציפות הסינוס ב־$\mathbb{R}$, ו־$\frac{1}{x} \to -\infty$, לכן $f(x) \to -\infty$.

גבול חד־צדדי אינסופי — זו נקודת אי־רציפות עיקרית (מסוג שני).

תשובה: תשובה ג: אי־רציפות עיקרית.

שאלה 8 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נפתח כל גורם בנפרד: לפי $e^t = 1 + t + o(t)$ עם $t = x^6$ נקבל

$$e^{x^6} = 1 + x^6 + o(x^6).$$

באופן דומה, לפי $\cos s = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24} - \dots$ עם $s = x^2$ נקבל

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^7).$$

מכפלה ושמירת איברים עד x^6:

$$(1 + x^6)(1 - \frac{x^4}{2}) = 1 - \frac{x^4}{2} + x^6 + \dots,$$

ולכן

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + x^6.$$

תשובה: תשובה ב: $P_6(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + x^6$.

תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 70

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נתחיל ממשפט פרמה: אם f גזירה בנקודת קיצון מקומי פנימית x_0, אז $f'(x_0)=0$. הפונקציה f גזירה בכל $\mathbb{R}$, ולכן $f'(a)=0$ ו־$f'(b)=0$.

נתבונן ב־$g=f'$ בקטע $[a,b]$. מאחר ש־f גזירה פעמיים, g גזירה בכל $\mathbb{R}$, ובפרט רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b).

משפט רול: אם g רציפה ב־$[a,b]$, גזירה ב־(a,b) ו־$g(a)=g(b)$, אז קיימת $c\in(a,b)$ עם $g'(c)=0$.

כאן $g(a)=g(b)=0$, ולכן קיימת $c\in(a,b)$ עם $f''(c)=g'(c)=0$.

תשובה: לפי פרמה $f'(a)=f'(b)=0$, ולפי רול עבור f' קיימת $c\in(a,b)$ עם $f''(c)=0$.

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחסום את הסדרה ונשתמש במשפט הסנדוויץ׳. לכל $1\le k\le n$:

$$\sqrt{k+1}+\sin k\ge \sqrt{2}-1>0,$$

וגם

$$\sqrt{k+1}+\sin k\le \sqrt{n+1}+1.$$

לכן

$$0\le a_n\le \frac{n(\sqrt{n+1}+1)}{n^2+2n+5}.$$

חלוקה ב־n^2:

$$\frac{n(\sqrt{n+1}+1)}{n^2+2n+5}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}\to\frac{0}{1}=0.$$

לפי משפט הסנדוויץ׳ (אם $b_n\le a_n\le c_n$ ו־$b_n,c_n\to L$ אז $a_n\to L$) נקבל $a_n\to 0$.

תשובה: $\lim a_n=0$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

נבדוק כל טענה. מתקיים

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0,$$

לכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית (א נכון). בנוסף

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty,$$

לכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית (ב נכון).

הנגזרת היא

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}},$$

והיא מתאפסת רק ב־$x=e^2$.

מתקיים $f'>0$ עבור $x<e^2$ ו־$f'<0$ עבור $x>e^2$, ולכן ב־$x=e^2$ יש מקסימום מקומי (ג נכון), ואין נקודת מינימום מקומית. לכן ד אינו נכון.

תשובה: תשובה ד: ל־f אין נקודת מינימום מקומית.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נסמן

$$F(x)=\int_{\pi}^{x}\cos^3 t\,dt.$$

הפונקציה $\cos^3$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כחזקה של פונקציה רציפה, ולכן לפי המשפט היסודי F גזירה ו־$F'(x)=\cos^3 x$; בנוסף $F(\pi)=0$.

הגבול הוא בדיוק הגדרת הנגזרת:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=F'(\pi)=\cos^3\pi=-1.$$

תשובה: תשובה א: -1.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נפרק את המכנה לגורמים ונשתמש בשברים חלקיים: $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$, וכן

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}.$$

האינטגרנד רציף בקטע $[2,4]$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ולכן ניתן להשתמש במשפט היסודי.

נקבל

$$\int_2^4\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\big[\ln(x+1)-\ln(x+3)\big]_2^4=(\ln 5-\ln 7)-(\ln 3-\ln 5).$$

כלומר $2\ln 5-\ln 3-\ln 7$.

תשובה: תשובה א: $2\ln 5-\ln 3-\ln 7$.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

בסביבה של $x=1$ מתקיים $x>0$, ולכן $f(x)=x^2+\arctan(x^2)$, פונקציה גזירה.

הנגזרת היא

$$f'(x)=2x+\frac{2x}{1+x^4},$$

ולכן $f'(1)=2+\frac{2}{2}=3$.

תשובה: תשובה ג: $f'(1)=3$.

שאלה 7 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נחשב את הגבול ב־0 ונשווה ל־$f(0)$. עבור $x\neq 0$:

$$x\ln(x^4)=4x\ln|x|.$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0}x\ln|x|=0$$

(למשל $\lim_{t\to 0^+}t\ln t=0$, ובצד שמאל מתקבל הנגדי). לכן $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

הגבול קיים וסופי אך שונה מ־$f(0)=2$, ולכן זו נקודת אי־רציפות סליקה.

תשובה: תשובה ב: אי־רציפות סליקה.

שאלה 8 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נחסום את השארית בעזרת שארית לגרנז׳:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

עבור c בין 0 ל־x.

מהנתון:

$$\left|R_n\left(\frac{1}{10}\right)\right| \le \frac{(n+1)!\,(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{10^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{10^{n+1}}.$$

עבור $n=0$ נקבל $\frac{1}{10}$, ועבור $n=1$ נקבל $\frac{4}{100}$ — שניהם אינם קטנים מ־$\frac{1}{100}$. עבור $n=2$ נקבל $\frac{9}{1000} < \frac{1}{100}$.

לכן ה־n הקטן ביותר שהנתונים מבטיחים הוא $n=2$.

תשובה: תשובה ג: $n=2$.

תשפ״ג · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 72

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט לגרנז׳ עבור הפונקציה $f(x)=\ln x$ בקטע $[a,b]$. היא רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b) (כי $a>0$), עם $f'(x)=\frac{1}{x}$.

משפט לגרנז׳: אם f רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b) אז קיימת $c\in(a,b)$ כך שמתקיים
$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

נקבל

$$\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{c}$$

עבור $a<c<b$.

מכיוון ש־$0<a<c<b$ מתקיים $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$, ולאחר הכפלה ב־$b-a>0$:

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},$$

ובפרט מתקיים אי־השוויון החלש.

תשובה: נובע ממשפט לגרנז׳ עבור $\ln x$ בקטע $[a,b]$.

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נגדיר $g(x) = f(x) + x^3 - 1$. זו פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות רציפות; פתרון המשוואה שקול לאפס של g.

נחשב:

$$g(2) = f(2) + 7 \geq -2 + 7 = 5 > 0,$$

וגם

$$g(-2) = f(-2) - 9 \leq 2 - 9 = -7 < 0.$$

משפט ערך הביניים: אם g רציפה ב־$[a,b]$ ו־$g(a), g(b)$ בעלי סימנים מנוגדים, קיימת $c \in (a,b)$ עם $g(c) = 0$.

לפי המשפט בקטע $[-2,2]$ קיימת $c \in (-2,2)$ כך ש־$g(c) = 0$, כלומר $f(c) + c^3 = 1$.

תשובה: לפי משפט ערך הביניים עבור $g(x) = f(x) + x^3 - 1$ בקטע $[-2,2]$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נחשב את הנגזרת הראשונה והשנייה:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x},$$

וגם

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

מתקיים $e^{-x} > 0$, לכן סימן f'' הוא סימן $x - 2$: שלילית עבור $x < 2$ (קמורה כלפי מטה) וחיובית עבור $x > 2$ (קמורה כלפי מעלה).

הקמירות מתחלפת רק ב־$x = 2$, ולכן יש נקודת פיתול יחידה.

תשובה: תשובה ב: נקודת פיתול יחידה ב־$x = 2$.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

זהו מקרה של 1^∞, ולכן נעבור לצורה של המספר e. מתקיים $1 - \frac{1}{2n^2+1} = \frac{2n^2}{2n^2+1}$, ונכתוב

$$\left(1 - \frac{1}{2n^2+1}\right)^{n^2} = \left[\left(1 - \frac{1}{2n^2+1}\right)^{2n^2+1}\right]^{\frac{n^2}{2n^2+1}}.$$

הבסיס שואף ל־e^{-1} והמעריך $\frac{n^2}{2n^2+1} \to \frac{1}{2}$.

לכן, מרציפות הפונקציות e^t ו־$\ln t$ בתחום הגדרתן (כשהבסיס חיובי), הגבול הוא $e^{-1/2}$.

תשובה: תשובה ד: $e^{-\frac{1}{2}}$.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ה.

נמצא פונקציה קדומה באינטגרציה בחלקים עם $u = x,\ v' = \cos x$:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

הפונקציה $x\cos x$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כמכפלה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי

$$\left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi} = (0 + \cos\pi) - (0 + \cos 0) = -1 - 1 = -2.$$

תשובה: תשובה ה: -2.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

לפי כלל המכפלה וכלל השרשרת:

$$f'(x) = e^{e^x}\cdot e^x\cos x - e^{e^x}\sin x.$$

בנקודה 0:

$$f'(0) = e^1\cdot 1\cdot 1 - e\cdot 0 = e.$$

תשובה: תשובה ד: $f'(0) = e$.

שאלה 7 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נחשב את הגבולות החד־צדדיים ב־$x = 1$. כאשר $x \to 1^-$: $\frac{1}{1-x} \to +\infty$, לכן $e^{\frac{1}{1-x}} \to \infty$ ו־$f(x) \to 0$.

כאשר $x \to 1^+$: $\frac{1}{1-x} \to -\infty$, לכן $e^{\frac{1}{1-x}} \to 0$ ו־$f(x) \to \frac{3}{2}$.

הגבולות החד־צדדיים סופיים ושונים, ולכן ב־$x = 1$ יש אי־רציפות מסוג קפיצה.

תשובה: תשובה א: אי־רציפות מסוג קפיצה.

שאלה 8 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נחשב כל מחובר בנפרד: $(x+1)^2 = 1 + 2x + x^2$ הוא כבר פולינום, ופולינום מקלורן מסדר 3 של $\sin x$ הוא $x - \frac{x^3}{6}$.

פולינום טיילור של סכום הוא סכום הפולינומים:

$$1 + 2x + x^2 + x - \frac{x^3}{6} = 1 + 3x + x^2 - \frac{x^3}{6}.$$

תשובה: תשובה ג: $1 + 3x + x^2 - \frac{x^3}{6}$.

תשפ״ב · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 75

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחפש אסימפטוטה $y = mx + n$ בכל כיוון בנפרד. כאשר $x \to +\infty$:

$$m = \lim \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1,$$

וגם

$$n = \lim \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

אסימפטוטה $y = x$.

כאשר $x \to -\infty$: $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+1/x^2}$, ולכן

$$m = \lim \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1,$$

וגם

$$n = \lim \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0.$$

אסימפטוטה $y = -x$.

תשובה: $y = x$ כאשר $x \to +\infty$, ו־$y = -x$ כאשר $x \to -\infty$.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק גזירות בנפרד עבור $x \neq 0$ ובנקודה $x = 0$. עבור $x > 0$: $f(x) = xe^{-x}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. עבור $x < 0$: $f(x) = xe^{x}$, $f'(x) = (1+x)e^{x}$. שם f גזירה כמכפלה של פונקציות גזירות.

בנקודה $x = 0$ נחשב לפי ההגדרה:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{he^{-|h|}}{h} = e^{-|h|} \to 1$$

משני הצדדים.

לכן f גזירה בכל $\mathbb{R}$, ומתקיים

$$f'(x) = (1-|x|)e^{-|x|}$$

(בפרט $f'(0) = 1$).

תשובה: כן; $f'(x) = (1-|x|)e^{-|x|}$, $f'(0) = 1$.

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

כדי ש־f תהיה רציפה ב־$\frac{\pi}{4}$ נדרש $A = \lim_{x\to\pi/4} f(x)$; הגבול מהצורה $\frac{0}{0}$ ($\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $2\sin^2\frac{\pi}{4} = 1$).

לפי לופיטל: נגזרת המונה

$$\frac{1}{3}\tan^{-2/3}x \cdot \frac{1}{\cos^2 x},$$

שב־$\frac{\pi}{4}$ שווה $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2$.

נגזרת המכנה $4\sin x\cos x = 2\sin 2x$, שב־$\frac{\pi}{4}$ שווה 2.

שתי הנגזרות רציפות בסביבת $\frac{\pi}{4}$ כהרכבות, מכפלות ומנות של פונקציות רציפות שהמכנים שלהן אינם מתאפסים שם, ולכן ניתן להציב בהן $x = \frac{\pi}{4}$.

לכן הגבול $= \frac{1}{3}$, והפונקציה רציפה ב־$\frac{\pi}{4}$ עבור $A = \frac{1}{3}$.

תשובה: כן: $A = \frac{1}{3}$.

שאלה 4

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. פונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם היא מוגדרת בסביבת x_0 ו־$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

ב. נבדוק תחילה רציפות: מתקיים $f(1) = 0$, וגם

$$\lim_{x\to 1^-} x\sin^2(\pi x) = 1\cdot\sin^2\pi = 0$$

בהצבה, כי $x\sin^2(\pi x)$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות. לכן f רציפה ב־1.

נגזרת מימין:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h\sin^2(\pi+\pi h)}{h} = \sin^2(\pi h) \to 0.$$

נגזרת משמאל:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)\sin^2(\pi h)}{h} = (1+h)\cdot\frac{\sin(\pi h)}{\pi h}\cdot\pi\sin(\pi h) \to 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

הנגזרות החד־צדדיות שוות, ולכן f גזירה ב־1 ו־$f'(1) = 0$.

תשובה: כן, $f'(1) = 0$.

שאלה 5

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה פונקציה קדומה בעזרת הצבה $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t\,dt$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2t\,dt}{t(1+t^2)} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$$

האינטגרנד רציף בקטע $[1,\infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ולכן ניתן להשתמש בנוסחת ניוטון–לייבניץ בכל קטע $[1, M]$.

לפי הגדרת האינטגרל הלא אמיתי,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{M\to\infty}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_1^M = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

תשובה: $\frac{\pi}{2}$

שאלה 26ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את ערכי הפונקציה והנגזרות הדרושים: $f(2)=\frac{1}{8}$, $f'(x)=-\frac{3}{x^4}\Rightarrow f'(2)=-\frac{3}{16}$, $f''(x)=\frac{12}{x^5}$.

פולינום טיילור (שני האיברים הראשונים):

$$P_1(x)=\frac{1}{8}-\frac{3}{16}(x-2).$$

שארית לגרנז':

$$R_1(x)=\frac{f''(c)}{2!}(x-2)^2=\frac{6}{c^5}(x-2)^2,$$

עבור c בין 2 ל־x.

לכן

$$\frac{1}{x^3}=\frac{1}{8}-\frac{3}{16}(x-2)+\frac{6}{c^5}(x-2)^2.$$

תשובה: $\frac{1}{x^3}=\frac{1}{8}-\frac{3}{16}(x-2)+\frac{6}{c^5}(x-2)^2$, c בין 2 ל־x.

תשפ״ב · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 76

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נזהה כאן סכום רימן. נחלק מונה ומכנה ב־n^2:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(k/n)^2}.$$

זהו סכום רימן של $h(x)=\frac{1}{1+x^2}$ בחלוקה שווה של $[0,1]$; הפונקציה h רציפה ב־$[0,1]$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס, ולכן אינטגרבילית.

הגבול:

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}.$$

תשובה: $\frac{\pi}{4}$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בנוסחת אורך הגרף. הנגזרת היא

$$f'(x)=\frac{x^3}{4}-\frac{1}{x^3}.$$

מתקיים

$$1+f'(x)^2=1+\frac{x^6}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^6}=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1}{x^3}\right)^2.$$

עבור $x<0$ הביטוי $\frac{x^3}{4}+\frac{1}{x^3}$ שלילי, ולכן

$$\sqrt{1+f'^2}=-\frac{x^3}{4}-\frac{1}{x^3}.$$

אורך הגרף הוא

$$L=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{x^3}{4}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\left[-\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1}=\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right)-\left(-1+\frac{1}{8}\right)=\frac{21}{16}.$$

תשובה: $\frac{21}{16}$

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

משפט לגרנז': אם f רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b), קיימת $c\in(a,b)$ עם

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

יהי $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. הפונקציה $f(t)=\tan t$ רציפה ב־$[0,x]$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס בקטע, וגזירה ב־$(0,x)$.

לכן לפי לגרנז' קיימת $c\in(0,x)$ עם

$$\tan x-\tan 0=\frac{1}{\cos^2 c}\cdot x.$$

כי $0<c<\frac{\pi}{2}$, מתקיים $0<\cos^2 c<1$, כלומר $\frac{1}{\cos^2 c}>1$, ולכן

$$\tan x=\frac{x}{\cos^2 c}>x.$$

תשובה: לפי לגרנז' $\tan x=\frac{x}{\cos^2 c}>x$.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. הפונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם היא מוגדרת בסביבת x_0 ו־
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0);$$
כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

ב. נסמן $h(x) = \arcsin \frac{x^2}{1+x^2}$. אז
$$f(x) = \frac{h(x) - h(\pi)}{x - \pi}$$
עבור $x \neq \pi$, ולכן $\lim_{x\to\pi} f(x) = h'(\pi)$ אם h גזירה ב־π.

עם $u = \frac{x^2}{1+x^2} \in [0,1)$: $u' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ו־$\sqrt{1-u^2} = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{1+x^2}$, ולכן
$$h'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1+2x^2}}.$$

לכן הפונקציה רציפה ב־π בדיוק עבור
$$C = h'(\pi) = \frac{2\pi}{(1+\pi^2)\sqrt{1+2\pi^2}}.$$

תשובה: כן: $C = \frac{2\pi}{(1+\pi^2)\sqrt{1+2\pi^2}}$

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. הנגזרת של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$
אם הגבול קיים וסופי.

ב. גזירות גוררת רציפות, ולכן נדרש $A = \lim_{x\to 0} g(x)$. נכתוב
$$g(x) = \frac{e^x - 1 - \sin x}{\sin x\,(e^x - 1)};$$
המונה $= (\text{כי } e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots, \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$, והמכנה $= x^2 + \frac{x^3}{2} + O(x^4)$.

לכן
$$g(x) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + O(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + O(x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + O(x^2),$$
ובפרט $\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2}$; נבחר $A = \frac{1}{2}$.

אז
$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{12} + O(x) \to \frac{1}{12}.$$
לכן עבור $A = \frac{1}{2}$ הפונקציה גזירה ב־0 ו־$g'(0) = \frac{1}{12}$; לכל A אחר היא אינה רציפה ולכן אינה גזירה.

תשובה: $A = \frac{1}{2}$, ואז $g'(0) = \frac{1}{12}$.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי, ולשם כך נכתוב

$$x^{k-\arctan x} = x^{k-\frac{\pi}{2}} \cdot x^{\frac{\pi}{2}-\arctan x},$$

כאשר $x^{\frac{\pi}{2}-\arctan x} = e^{\arctan(1/x)\ln x}$ (עבור $x>0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$).

מתקיים

$$\arctan \frac{1}{x} \cdot \ln x \le \frac{\ln x}{x} \to 0,$$

ולכן, מרציפות e^t ב־$\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{k-\arctan x}}{x^{k-\pi/2}} = 1.$$

לפי מבחן ההשוואה הגבולי (פונקציות חיוביות), האינטגרל מתכנס אם ורק אם

$$\int_1^\infty x^{k-\frac{\pi}{2}}dx$$

מתכנס, כלומר אם ורק אם $k-\frac{\pi}{2} < -1$.

לכן האינטגרל מתכנס עבור $k < \frac{\pi}{2}-1$ ומתבדר עבור $k \ge \frac{\pi}{2}-1$. לאינטגרנד אין פונקציה קדומה אלמנטרית, ולכן לא ניתן לחשב את ערכו בצורה סגורה.

תשובה: מתכנס אם ורק אם $k < \frac{\pi}{2}-1$.

תשפ"ב · סמסטר א׳ · מועד מיוחד

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 77

שאלה 1

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נשתמש בפיתוחי מקלורן:

$$\tan x = x + O(x^3).$$

מתקיים

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3),$$

ועם $u = \tan x$:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

(בדיקה: $f(0)=0$, $f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} \Rightarrow f'(0)=1$, ו־$f''(0) = -1$.) לכן

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

תשובה: $x - \frac{x^2}{2}$ (תשובה ב)

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הצבה $t = e^x$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$:

$$\frac{e^x}{x}dx = \frac{t}{\ln t}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{dt}{\ln t},$$

והגבולות e ו־e^2. לכן

$$I = \int_e^{e^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

לפיכך א נכונה, ב שגויה (למשל כי $\frac{t}{\ln t} > \frac{1}{\ln t}$ בקטע).

טענה ג: ב־$[1,2]$ מתקיים $\frac{e^x}{2} \le \frac{e^x}{x} \le e^x$, ולכן

$$\frac{e^2-e}{2} \le I \le e^2 - e$$

– נכונה.

טענה ד: ב־$[e, e^2]$ מתקיים $t > 2$, ולכן $\frac{1}{\ln t} < \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\ln t}$; אינטגרציה נותנת

$$I < \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{t}{\ln t}dt$$

– נכונה.

תשובה: א, ג, ד

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את F במפורש: $f(t) = 1$ עבור $t > 0$ ו־$f(t) = -1$ עבור $t < 0$. לכן עבור $x > 0$: $F(x) = x$, ועבור $x < 0$:

$$F(x) = \int_0^x (-1)dt = -x.$$

כלומר $F(x) = |x|$.

הפונקציה $|x|$ אינה גזירה ב־0 (נגזרות חד־צדדיות ± 1), ולכן א שגויה.

הפונקציה F רציפה בכל $\mathbb{R}$ כי פונקציית הערך המוחלט רציפה (ב נכונה); F זוגית ולא אי־זוגית (ג שגויה); ל־F מינימום גלובלי ב־$x = 0$ (ד נכונה).

תשובה: ב ו־ד

שאלה 3

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נביא למכנה משותף:

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x\sin x}.$$

כי $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ו־$x\sin x \sim x^2$, נקבל $f(x) \sim -\frac{x}{6} \to 0$. לכן הגבול ב־$0$ קיים וסופי (א נכונה) ו־ב שגויה.

כאשר $x \to +\infty$: $\frac{1}{x} \to 0$, אבל $\frac{1}{\sin x}$ אינה חסומה בשום קרן (M,∞) (ליד $x = k\pi$) ומקבלת שם גם ערכים ± 1 (ב־$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$).

לכן $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ אינו קיים: ד נכונה, ג שגויה.

תשובה: א ו־ד

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמקם את הכדור כך שמרכזו בראשית; חתך בגובה y הוא עיגול ברדיוס $\sqrt{16-y^2}$. קרקעית המיכל ב־$y=-4$ ופני הדלק ב־$y=-1$.

נפח הדלק הוא

$$V=\int_{-4}^{-1}\pi(16-y^2)\,dy=\pi\left[16y-\frac{y^3}{3}\right]_{-4}^{-1}.$$

נציב את הגבולות:

$$=\pi\left[\left(-16+\frac{1}{3}\right)-\left(-64+\frac{64}{3}\right)\right]=\pi\,(48-21)=27\pi.$$

תשובה: 27π מ"ק

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

כדי למצוא את התמונה נחקור את המונוטוניות. נגזור:

$$f'(x)=e^{-x}\left(2(x+3)-(x+3)^2\right)=-e^{-x}(x+3)(x+1).$$

בתחום $x\ge -2$: $x+3>0$, ולכן $f'>0$ ב־$(-1,\infty)$ ו־$f'<0$ ב־$[-2,-1]$. מקסימום ב־$x=-1$: $f(-1)=4e$.

מתקיים $f(-2)=e^2$, ו־$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, כאשר $f>0$ תמיד.

בקרן $[-1,\infty)$ הפונקציה f רציפה כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות ויורדת ממש מ־$4e$ לגבול 0, ולכן לפי משפט ערך הביניים מקבלת את כל הערכים ב־$(0,4e]$.

הערכים ב־$[-2,-1]$ נמצאים ב־$(0,4e]$ $\supset [e^2,4e]$.

תשובה: $(0,4e]$

שאלה 5ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח תחילה את אי־השוויון המוצע בעזרת משפט לגרנז' על $\ln$ בקטע $[k,k+1]$; הפונקציה $\ln$ רציפה בקטע זה כי היא רציפה בכל $(0,\infty)$.

לפי לגרנז':

$$\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{c}$$

עבור $c\in(k,k+1)$, ולכן

$$\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}.$$

החלפת k ב־$k-1$ באי־השוויון השמאלי נותנת $\frac{1}{k}\le \ln k-\ln(k-1)$, ומכאן לכל $k>1$:

$$\ln(k+1)-\ln k\le\frac{1}{k}\le\ln k-\ln(k-1).$$

נסכום עבור $k=n,\dots,2n$ $(n\ge 2)$; הסכומים טלסקופיים:

$$\ln(2n+1)-\ln n\le\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\le\ln(2n)-\ln(n-1).$$

מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$ מתקיים $\ln\frac{2n+1}{n}\to\ln 2$ ו־$\ln\frac{2n}{n-1}\to\ln 2$, ולפי כלל הסנדוויץ' הגבול הוא $\ln 2$.

תשובה: $\ln 2$

תשפ"ב · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 79

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק את האינטגרנד:

$$\frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{(x+1)^2+4}.$$

לכן

$$F(x) = \int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

טענה א נכונה:

$$F(-1) - F(-3) = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 8 - \left(0 + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}(-\ln 16 - \pi)$$

✓.

טענה ד נכונה:

$$F(1) - F(-1) = \frac{1}{2}\ln 8 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}(\ln 16 - \pi)$$

✓.

טענות ב ו־ג: הערכים $\frac{1}{8}(\ln 16 - 2\pi)$ ו־$\frac{1}{16}(\ln 16 - 2\pi)$ שליליים, אך האינטגרנד חיובי ב־$[1,2]$ וב־$[0,1]$ (למעט $x=0$), ולכן האינטגרלים חיוביים – שתי הטענות שגויות.

תשובה: א ו־ד

שאלה 2א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק את הנקודות שבהן המכנה מתאפס. בנקודה $x=0$:

$$\frac{\sin 2x}{x(x-1)} = \frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{x-1} \to \frac{2}{-1} = -2$$

(הגורם $\frac{2}{x-1}$ רציף ב־0 כמנה של פונקציות רציפות), גבול סופי – אין אסימפטוטה אנכית (א שגויה).

בנקודה $x=1$: המונה שואף ל־$\sin 2 \neq 0$ (מרציפות הסינוס) והמכנה ל־0, ולכן $|f(x)| \to \infty$ – $x=1$ אסימפטוטה אנכית (ב נכונה).

כאשר $x \to \pm\infty$:

$$\left|\frac{\sin 2x}{x^2-x}\right| \le \frac{1}{|x^2-x|} \to 0,$$

ולכן $f \to 5$: $y=5$ אסימפטוטה אופקית (ד נכונה), ו־$y=0$ אינה (ג שגויה).

תשובה: ב ו־ד

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

"קמורה כלפי מעלה" פירושה $f'' \geq 0$ (צורת $\cup$). נגזור: $g' = 2ff'$ ו־$g'' = 2(f')^2 + 2ff''$.

טענה ג: אם $f \geq 0$ אז

$$g'' = 2(f')^2 + 2ff'' \geq 0,$$

ולכן g קמורה כלפי מעלה – נכונה.

טענה א שגויה: $f(x) = x^2$ ב־$[-1,1]$ נותנת $g = x^4$, שהמינימום שלה בנקודה הפנימית 0.

טענות ב ו־ד שגויות: $f(x) = x^2 - 10$ ב־$[-1,1]$ קמורה ו־$f \leq 0$, אבל

$$g(0) = 100 > 81 = g(\pm 1),$$

כלומר המקסימום של g בנקודה פנימית.

תשובה: ג בלבד

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק גזירות ב־0 לפי ההגדרה:

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \frac{|1-\cos h|\cdot|\cos\frac{1}{h}-1|}{|h|} \leq \frac{2(1-\cos h)}{|h|} \to 0,$$

ולכן $f'(0) = 0$ (ב נכונה).

עבור $x \neq 0$:

$$f'(x) = -\sin x\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) + (\cos x - 1)\cdot\frac{\sin(1/x)}{x^2}.$$

המחובר הראשון שואף ל־0, אך

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2},$$

ולכן המחובר השני מתנהג כמו $-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}$, שאין לו גבול. לכן $\lim_{x\to 0} f'(x)$ אינו קיים (א שגויה), ו־f' אינה רציפה ב־0 (ג שגויה).

הפונקציה f גזירה לכל $x \neq 0$ (הרכבות של פונקציות גזירות) וגם ב־0, כלומר בכל נקודות הרציפות שלה (ד נכונה).

תשובה: ב ו־ד

שאלה 4א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נסמן את צלעות הגינה $x, y > 0$ עם $xy = 1$. שטח החומה:

$$S = 2x^2 + 2y^2 = 2x^2 + \frac{2}{x^2}.$$

נגזור:

$$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^3} = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = 1.$$

מתקיים $S' < 0$ עבור $0 < x < 1$ ו־$S' > 0$ עבור $x > 1$, ולכן $x = 1$ מינימום מוחלט. (לחלופין: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ לפי אי־שוויון הממוצעים.)

המידות: $x = y = 1$ מ', ושטח החומה המינימלי 4 מ"ר.

תשובה: גינה ריבועית 1×1 מ' (שטח חומה 4 מ"ר).

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הסכום הוא

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \cos\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2\right),$$

סכום רימן של $h(x) = x\cos(x^2)$ בחלוקה שווה של $[0,1]$.

הפונקציה h רציפה ב־$[0,1]$ כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות, ולכן אינטגרבילית, והגבול שווה $\int_0^1 x\cos(x^2)\,dx$.

בהצבה $u = x^2$:

$$\int_0^1 x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos u\,du = \frac{\sin 1}{2}.$$

תשובה: $\frac{\sin 1}{2}$

שאלה 5ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפריד למקרים לפי הסימן של b. אם $b > 0$: $x^a e^{bx} \to \infty$ כאשר $x \to \infty$ (אקספוננט גובר על חזקה), ובפרט $x^a e^{bx} \geq 1$ לכל x גדול מספיק – האינטגרל מתבדר.

אם $b = 0$:

$$\int_1^\infty x^a\,dx$$

מתכנס אם ורק אם $a < -1$.

אם $b < 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a e^{bx}}{1/x^2} = \lim x^{a+2}e^{bx} = 0,$$

ולכן לכל x גדול מספיק $0 < x^a e^{bx} \leq \frac{1}{x^2}$; לפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתכנס, לכל a.

(בקטע הסופי $[1, M]$ האינטגרנד רציף כמכפלה של פונקציות רציפות, כך שההתכנסות תלויה רק בהתנהגות באינסוף.)

תשובה: מתכנס אם ורק אם $b < 0$ (לכל a), או $b = 0$ ו־$a < -1$.

תשפ"ב · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 81

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נגזור כל מחובר:

$$\left(\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+4} = \frac{6x}{(x^2+1)(x^2+4)},$$

ו־

$$\left(\arctan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1/2}{1+x^2/4} = \frac{2}{x^2+4}.$$

לכן

$$f'(x) = \frac{6x+2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{2(x^2+3x+1)}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

הצבה: $f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ✓; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{88}{85} \neq 0$; $f'(1) = \frac{2\cdot 5}{2\cdot 5} = 1 \neq \frac{2}{7}$; $f'(2) = \frac{2\cdot 11}{5\cdot 8} = \frac{11}{20} \neq \frac{2}{7}$.

תשובה: רק א נכונה: $f'(0) = \frac{1}{2}$.

שאלה 2א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי מקלורן:

$$\cos^3 x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^3 = 1 - \frac{3x^2}{2} + O(x^4)$$

ו־

$$3\sin^2 x = 3x^2 + O(x^4).$$

לכן

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + O(x^4)$$

(הפונקציה זוגית, ומקדם x^3 הוא 0).

מכאן שפולינום מקלורן מסדר 2 וגם מסדר 3 הוא

$$P(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2.$$

לכן א ו־ב נכונות, ג ו־ד שגויות.

תשובה: א ו־ב

שאלה 2ב נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב תחילה את פולינום מקלורן מסדר 1: $f(0)=1$,

$$f'(x) = -3\cos^2 x \sin x + 6 \sin x \cos x,$$

ולכן $f'(0)=0$ ו־$P_1(x)=1$.

לפי לגרנז':

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{f''(c)}{2}\cdot\frac{1}{100}$$

עבור $c \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$, כאשר

$$f''(x) = 3\left(2\sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x - \cos^3 x + 2\cos^2 x\right).$$

הערכה גסה:

$$|f''| \le 3(2+2+1+2) = 21,$$

ולכן

$$\left|f(\tfrac{1}{10}) - 1\right| \le \frac{21}{200} = 0.105.$$

לפיכך א נכונה.

הערכה עדינה יותר עבור $c\in(0,0.1)$: $2\sin^2 c\cos c - 2\sin^2 c \in (-0.02, 0]$ ו־$\cos^2 c(2-\cos c)\in(0,1.01)$, ולכן $|f''(c)| \le 3.1 < 12$ ו־

$$|f(\tfrac{1}{10}) - 1| < \frac{12}{200} = 0.06.$$

לפיכך גם ב נכונה.

מכאן $f(\frac{1}{10}) < 1.06$, ולכן ג ו־ד שגויות (בפועל $f(0.1)\approx 1.015$).

תשובה: א ו־ב

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נשתמש בנוסחת אורך הגרף. הנגזרת היא

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2-1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2-1}.$$

מתקיים

$$1 + f'(x)^2 = 1 + 4x^4 - 4x^2 = (2x^2-1)^2,$$

ולכן $\sqrt{1+f'^2} = 2x^2-1$ עבור $x \ge 1$.

אורך הגרף הוא

$$L = \int_1^3 (2x^2-1)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - x\right]_1^3 = 15 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{46}{3}.$$

תשובה: $\frac{46}{3}$ (תשובה ג)

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נזהה בגבול נגזרת של פונקציה צוברת. נסמן

$$F(x)=\int_{1}^{x} e^{t^2/2}dt,$$

ומתקיים $F(1)=0$.

האינטגרנד רציף ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי

$$F'(x)=e^{x^2/2}.$$

לכן הגבול הוא

$$\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)$$

(לחלופין, לופיטל במקרה $\frac{0}{0}$).

נקבל

$$F'(1)=e^{1/2}=\sqrt{e}.$$

תשובה: $\sqrt{e}$

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בזהות

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

עם $a=\sqrt[3]{x+5},\ b=\sqrt[3]{x}$:

$$a-b=\frac{5}{a^2+ab+b^2}.$$

לכן הביטוי שווה

$$\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+\sqrt[3]{x(x+5)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{5}{\sqrt[3]{(1+5/x)^2}+\sqrt[3]{1+5/x}+1}.$$

כאשר $x\to\infty$ המכנה שואף ל־3 (מרציפות פונקציית השורש השלישי ב־$\mathbb{R}$), והגבול הוא $\frac{5}{3}$.

תשובה: $\frac{5}{3}$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחלק למקרים לפי הסימן של a. נסמן

$$g(x) = x^4 - ax + a = x^4 + a(1-x).$$

אז $g(0) = a$ ו־$g(1) = 1$.

אם $a > 0$: לכל $x \in [0,1]$ מתקיים $x^4 \geq 0$ ו־$a(1-x) \geq 0$, ושניהם מתאפסים רק ב־$x = 0$ וב־$x = 1$ בהתאמה – לא בו־זמנית. לכן $g > 0$ ואין פתרון.

אם $a = 0$: המשוואה $x^4 = 0$ והפתרון היחיד הוא $x = 0$.

אם $a < 0$:

$$g(0) = a < 0 < 1 = g(1)$$

ו־g רציפה ב־$[0,1]$ כפולינום, ולכן לפי משפט ערך הביניים יש פתרון ב־$(0,1)$. בנוסף $g'(x) = 4x^3 - a > 0$ ב־$[0,1]$, כך ש־g עולה ממש והפתרון יחיד.

לכן יש פתרון יחיד בדיוק כאשר $a \leq 0$.

תשובה: $a \leq 0$

תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 83

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

עבור $x \neq 0$ הפונקציה רציפה וגזירה (לכל $b \neq 0$, הנדרש כדי ש־f תוגדר), כמנה, מכפלה, הרכבה וסכום של פונקציות רציפות וגזירות שבהן המכנים אינם מתאפסים; לכן יש לבדוק רק את $x = 0$.

נחשב את הגבול משמאל:

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2},$$

ולכן

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim \frac{x^3/2}{x^2} = 0.$$

מימין: $x^2 \cos \frac{4}{3x} \to 0$ (חסומה כפול אפס) ו־$\frac{x}{b} \to 0$.

1) לרציפות נדרש $a = 0$, ו־$b \neq 0$ כלשהו.

2) גזירות (דורשת רציפות, $a = 0$): משמאל

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \to \frac{1}{2};$$

מימין

$$\frac{f(x)}{x} = x \cos \frac{4}{3x} + \frac{1}{b} \to \frac{1}{b}.$$

שוויון הנגזרות החד־צדדיות: $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, כלומר $b = 2$.

תשובה: 1) $a = 0$, כל $b \neq 0$; 2) $a = 0,\ b = 2$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח קיום לפי משפט ערך הביניים ויחידות לפי מונוטוניות. נגדיר $g(x)=x^3-3x$; המשוואה שקולה ל־$g(x)=a$.

הפונקציה g רציפה ב־$\mathbb{R}$ כפולינום, ומתקיים $g(0)=0$, $g(1)=-2$.

קיום: $a\in[-2,0]$ הוא ערך בין $g(1)$ ל־$g(0)$, ולפי משפט ערך הביניים קיים $x\in[0,1]$ עם $g(x)=a$.

יחידות:

$$g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)<0$$

ב־$(0,1)$, לכן g יורדת ממש ב־$[0,1]$ וחד־חד־ערכית שם; אין שני פתרונות.

תשובה: פתרון יחיד בקטע לפי ערך הביניים ומונוטוניות.

שאלה 2א(1)

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו גבול מסוג 1^∞. נכתוב

$$(\tan x)^{\tan 2x}=e^{\tan 2x\ \ln\tan x}$$

ונציב $t=\tan x\to 1$.

מתקיים $\tan 2x=\frac{2t}{1-t^2}$ ו־$\ln t\sim t-1$, ולכן

$$\tan 2x\ln\tan x\sim\frac{2t(t-1)}{(1-t)(1+t)}=-\frac{2t}{1+t}\to -1.$$

פונקציית האקספוננט רציפה ב־$\mathbb{R}$, ולכן הגבול הוא e^{-1}.

תשובה: $\frac{1}{e}$

שאלה 2א(2)

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח לפי הגדרת הגבול. יהי $\varepsilon>0$. לכל $n\geq 1$ מתקיים

$$\left|\frac{3n}{n^3+2}\right|<\frac{3n}{n^3}=\frac{3}{n^2}\leq\frac{3}{n}.$$

נבחר $N>\frac{3}{\varepsilon}$. לכל $n>N$: $\frac{3}{n}<\varepsilon$, ולכן

$$\left|\frac{3n}{n^3+2}-0\right|<\varepsilon.$$

תשובה: $N=\left\lceil\frac{3}{\varepsilon}\right\rceil$ מתאים.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

גזירות גוררת רציפות:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

ולכן $a+b=f(1)=1$.

נגזרת ימנית: נציב $u=x-1$;

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2),$$

לכן

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{\frac{\ln(1+u)}{u}-1}{u}\to -\frac{1}{2}.$$

נגזרת שמאלית: $(ax^2+b)'=2ax$, ב־1: $2a$. מהשוויון $2a=-\frac{1}{2}$ נקבל $a=-\frac{1}{4}$ ו־$b=\frac{5}{4}$.

תשובה: $a=-\frac{1}{4},\ b=\frac{5}{4},\ f'(1)=-\frac{1}{2}$

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(1) נשתמש בפיתוחי טיילור:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),$$

וכן

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

המכפלה:

$$1+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)x^4+o(x^4)=1-\frac{x^4}{3}+o(x^4),$$

ולכן הגבול $\frac{1}{3}$.

(2) נסמן $s=\sin x\to 0$:

$$\sin s-s=-\frac{s^3}{6}+o(s^3),$$

ו־$s^3\sim x^3$.

לכן הגבול $-\frac{1}{6}$.

תשובה: (1) $\frac{1}{3}$; (2) $-\frac{1}{6}$

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במבחן ההשוואה. האינטגרנד חיובי ורציף ב־$[1,\infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס, ו־

$$0 < \frac{e^{\sin x}}{x^2} \le \frac{e}{x^2}.$$

האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{e}{x^2}dx = e$$

מתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתכנס.

תשובה: מתכנס.

שאלה 4א פתרון רשמי

$\sqrt{4+e^{-t}} \ge 2$, ולכן $\int_1^x \sqrt{4+e^{-t}}dt \ge 2(x-1) \to \infty$: מקרה $\frac{\infty}{\infty}$.

לפי לופיטל והמשפט היסודי: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+e^{-x}}}{1} = 2$.

תשובה: 2

שאלה 4ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(1) אינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx,$$

ו־

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

לכן

$$\int x^2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+C.$$

(2) נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = \arctan\frac{1}{x}$, $u' = \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

מתקיים

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x - \arctan x,$$

ולכן התוצאה

$$\frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{x-\arctan x}{2} + C.$$

תשובה: (1) $-e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+C$; (2) $\frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{x-\arctan x}{2} + C$

תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 85

שאלה 1א(1) פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$: מונה ומכנה רציפים ב־$(0,\infty)$ כסכום, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות, ומתאפסים ב־$x=1$ ($0=1-1\cdot(0+1)$); נשתמש בכלל לופיטל.

נחשב:

$$\left(x^{x+1}\right)'=\left(e^{(x+1)\ln x}\right)'=x^{x+1}\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right),$$

ובנקודה 1 ערכה 2.

נגזרת המונה ב־1:

$$2\cdot(\ln 1+1)+1\cdot\frac{1}{1}-1=2.$$

נגזרת המכנה: -1.

נגזרת המונה רציפה ב־$(0,\infty)$ כסכום ומכפלה של פונקציות רציפות, ולכן הגבול הוא

$$\frac{2}{-1}=-2.$$

תשובה: -2

שאלה 1א(2) פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח לפי הגדרת הגבול. יהי $\varepsilon>0$. לכל $n\geq 1$ מתקיים

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}-0\right|=\frac{2n}{n^3+1}<\frac{2n}{n^3}=\frac{2}{n^2}\leq\frac{2}{n}.$$

נבחר $N>\frac{2}{\varepsilon}$ טבעי. אז לכל $n>N$:

$$\frac{2}{n}<\frac{2}{N}<\varepsilon.$$

לכן לכל $n>N$ מתקיים

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}\right|<\varepsilon,$$

כנדרש.

תשובה: $N=\left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil$ מתאים.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפריד בין קטע סופי לבין הזנב. נסמן $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$. לפי הגדרת הגבול עם $\varepsilon = 1$ קיים $M > a$ כך שלכל $x > M$:
$|f(x) - L| < 1$, כלומר $|f(x)| < |L| + 1$.

בקטע הסגור $[a, M]$ הפונקציה רציפה, כי לפי הנתון היא רציפה ב־$[a, \infty)$, ולכן לפי משפט ויירשטראס היא חסומה שם:
$|f(x)| \le K$.

לכן לכל $x \ge a$:

$$|f(x)| \le \max\{K, |L| + 1\},$$

ו־f חסומה ב־$[a, \infty)$.

תשובה: חסם: $\max\{K, |L| + 1\}$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

האינטגרנד אינו חסום ליד $x = 1$; זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג שני.

נחשב:

$$\int_0^b (1-x)^{-3/4}\,dx = \Big[-4(1-x)^{1/4}\Big]_0^b = 4 - 4(1-b)^{1/4}.$$

כאשר $b \to 1^-$ הביטוי שואף ל־4, ולכן האינטגרל מתכנס ושווה 4.

תשובה: מתכנס, ערכו 4.

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוח

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

אז

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}.$$

מכאן

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0),$$

ולכן f רציפה ב־0.

לגזירות:

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2(e^x - 1 - x) - x(e^x - 1)}{2x^2(e^x - 1)}.$$

המונה:

$$x^2 + \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

והמכנה $2x^3 + o(x^3)$.

לכן

$$f'(0) = -\frac{1}{12}$$

והפונקציה גזירה ב־0.

תשובה: רציפה וגזירה ב־0, $f'(0) = -\frac{1}{12}$.

שאלה 3א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(1) (בהנחה $\sin a \neq 0$) זהו מקרה של 1^∞, ולכן ניקח לוגריתם:

$$\frac{\ln \sin x - \ln \sin a}{x - a} \to (\ln \sin x)'\big|_{x=a} = \cot a$$

לפי הגדרת הנגזרת.

פונקציית האקספוננט רציפה ב־$\mathbb{R}$, ולכן הגבול הוא $e^{\cot a}$.

(2) נשתמש בגבולות יסודיים ליד 0:

$$\sqrt{1+u} - 1 \sim \frac{u}{2}$$

ו־$\arctan(2x) \sim 2x$, ולכן המונה $\sim x$; המכנה $e^{4x} - 1 \sim 4x$.

לכן הגבול הוא

$$\frac{x}{4x} \to \frac{1}{4}.$$

תשובה: (1) $e^{\cot a}$; (2) $\frac{1}{4}$

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

כאשר t עובר מ־0 ל־2π, x עולה מ־0 ל־2π ו־$y \geq 0$. השטח הוא

$$\int y\,dx = \int_0^{2\pi} y(t)\,x'(t)\,dt.$$

לכן השטח הוא

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt.$$

כלומר השטח

$$= 2\pi - 0 + \pi + 0 = 3\pi.$$

תשובה: 3π

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$, ולכן נשתמש בכלל לופיטל. נציב $s = x - 1 \to 0$; מונה ומכנה שואפים ל־0.

האינטגרנד $\left(e^t - 1 - t\right)^2$ רציף ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה והפרש של פונקציות רציפות, ולכן לפי לופיטל והמשפט היסודי:

$$\lim_{s\to 0} \frac{(e^s - 1 - s)^2}{5s^4}.$$

מתקיים $e^s - 1 - s \sim \frac{s^2}{2}$, ולכן

$$(e^s - 1 - s)^2 \sim \frac{s^4}{4}.$$

הגבול:

$$\frac{1/4}{5} = \frac{1}{20}.$$

תשובה: $\frac{1}{20}$

שאלה 24ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(1) נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u=\ln\frac{1+x}{1-x}$, $u'=\frac{2}{1-x^2}$, $v=\frac{x^2}{2}$:

$$\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$$

נפרק:

$$\frac{x^2}{1-x^2}=-1+\frac{1}{1-x^2},$$

ומתקיים $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. לכן התוצאה

$$\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C.$$

(2) נפצל לפי סימני x ו־$1-x$: ב־$[-1,0]$ האינטגרנד

$$\frac{1-x}{1-x}=1,$$

תרומה 1.

בקטע $[0,1]$:

$$\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1,$$

תרומה $2\ln 2-1$. בקטע $[1,2]$:

$$\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{1+x},$$

תרומה $1-2\ln\frac{3}{2}$.

סך הכול:

$$1+4\ln 2-2\ln 3=1+\ln\frac{16}{9}.$$

תשובה: (1) $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C$; (2) $1+\ln\frac{16}{9}$

תשפ״א · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 87

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את הגבולות החד־צדדיים ונשווה אותם ל־$f(0)=e^2$. משמאל:

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{a/x}=\lim_{x\to 0^-}\left[(1+x)^{1/x}\right]^a=e^a$$

(מרציפות פונקציית החזקה y^a ב־$(0,\infty)$).

מימין:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{b/x}=\left(1+\frac{-2x}{1+x}\right)^{b/x}=\left[\left(1+\frac{-2x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-2x}}\right]^{\frac{-2b}{1+x}}\to e^{-2b}$$

(מרציפות האקספוננט והלוגריתם בתחומי הגדרתם).

רציפות ב־0 דורשת $e^a=e^{-2b}=f(0)=e^2$, ולכן $a=2$ ו־$-2b=2$.

תשובה: $a=2,\ b=-1$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נגדיר $h(x)=g(x)-f(x)$. כהפרש של פונקציות רציפות, h רציפה ב־$[a,b]$.

מהנתון $h(a)=g(a)-f(a)<0$ ו־$h(b)=g(b)-f(b)>0$.

לפי משפט ערך הביניים (בולצאנו) קיימת $c\in(a,b)$ עם $h(c)=0$, כלומר $g(c)=f(c)$.

תשובה: נובע ממשפט ערך הביניים עבור $h=g-f$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(1) נסמן $a_n=\frac{(2n-1)!}{(n^2+1)^n e^n}>0$. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$ אז גם $\sqrt[n]{a_n}\to L$.

נחשב:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)(2n)}{e\,((n+1)^2+1)}\cdot\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}\right)^n.$$

הגורם הראשון שואף ל־$\frac{4}{e}$, ו־$\left(1-\frac{2n+1}{n^2+2n+2}\right)^n\to e^{-2}$ כי $\frac{n(2n+1)}{n^2+2n+2}\to 2$. לכן $L=\frac{4}{e^3}$.

(2) מתקיים $|\sin(n!)|\le 1$ ולכן

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}\right|\le\frac{n^{2/3}}{n+1}\to 0;$$

לפי כלל הסנדוויץ' הגבול הוא 0.

תשובה: (1) $\frac{4}{e^3}$; (2) 0

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפצל: $\int_0^1 + \int_1^\infty$. המכנה הוא $x^3\sqrt{x+1}$.

ליד 0: $1 \to \frac{\sin^3 x}{x^3\sqrt{x+1}}$. האינטגרנד רציף ב־$[0,1]$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ולכן הוא חסום ב־$(0,1]$ וניתן להשלמה לרציף — $\int_0^1$ מתכנס (אינו אמיתי למעשה).

בקטע $[1,\infty)$ מתקיים

$$\left|\frac{\sin^3 x}{\sqrt{x^7+x^6}}\right| \le \frac{1}{x^{7/2}}$$

ו־$\int_1^\infty x^{-7/2}dx$ מתכנס, ולכן האינטגרל מתכנס בהחלט.

תשובה: האינטגרל מתכנס (בהחלט).

שאלה 3א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(1) נחלק מונה ומכנה ב־x:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{\cos x}{x}-\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}}.$$

מאחר ש־$0 \to \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}$ (חסומה כפול שואפת לאפס), ומרציפות פונקציית השורש ב־$[0,\infty)$, הגבול 1.

(2) פיתוחי טיילור:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$
$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

ההפרש:

$$\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

ולכן הגבול $-\frac{1}{12}$.

תשובה: (1) 1; (2) $-\frac{1}{12}$

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

חילוק פולינומים:

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}.$$

לכן

$$\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = (1-a)x - (1+b) + \frac{2}{x+1}.$$

כדי שהגבול יהיה 0 חייב $1-a=0$ ואז $-(1+b)=0$.

כלומר $y = x-1$ היא האסימפטוטה המשופעת ב־$+\infty$.

תשובה: $a=1,\ b=-1$

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח בעזרת פונקציית עזר: נגדיר

$$g(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$$

ל־$x \geq 1$; מתקיים $g(1) = 0$.

הנגזרת היא

$$g'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 2 = \ln x + \frac{1}{x} - 1,$$

ו־$g'(1) = 0$.

הנגזרת השנייה היא

$$g''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$$

ל־$x > 1$, לכן g' עולה ממש ו־$g'(x) > g'(1) = 0$ ל־$x > 1$.

הפונקציה g רציפה ב־$[1, \infty)$ כסכום ומכפלה של פונקציות רציפות, ולכן g עולה ממש ב־$[1, \infty)$ ו־$g(x) > g(1) = 0$ ל־$x > 1$, וזה האי־שוויון.

תשובה: $g(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$ עולה ממש ומתאפסת ב־1.

שאלה 4ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

(1) נשתמש בהצבה $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$, ונקבל

$$-\int \frac{dt}{t(t-1)^2}.$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{t(t-1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2},$$

ולכן האינטגרל שווה

$$-\ln|t| + \ln|t-1| + \frac{1}{t-1} + C.$$

נחזור ל־x ונקבל

$$\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right| + \frac{1}{\cos x - 1} + C.$$

(2) נציב $x = t^2$, $dx = 2t\, dt$, ונקבל

$$\int_0^1 2t \arctan t\, dt.$$

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\left[t^2 \arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

לכן

$$\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

תשובה: (1) $\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right| + \frac{1}{\cos x - 1} + C$; (2) $\frac{\pi}{2} - 1$

תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 89

שאלה 1 נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ח.

נכפול ונחלק בצמוד:

$$\sqrt{4n^2+8n}-\sqrt{4n^2-8n}=\frac{16n}{\sqrt{4n^2+8n}+\sqrt{4n^2-8n}}.$$

נחלק מונה ומכנה ב־n. מרציפות פונקציית השורש ב־$[0,\infty)$ נקבל

$$\frac{16}{\sqrt{4+\frac{8}{n}}+\sqrt{4-\frac{8}{n}}}\to\frac{16}{2+2}=4.$$

תשובה: $L=4$

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ד.

נכתוב $h(x)=e^{f(x)\ln f(x)}$ ונגזור לפי כלל השרשרת:

$$h'(x)=f(x)^{f(x)}\left(f'(x)\ln f(x)+f(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=f(x)^{f(x)}f'(x)\left(\ln f(x)+1\right).$$

בנקודה 0:

$$h'(0)=2^2\cdot 8\cdot(\ln 2+1)=32(\ln 2+1).$$

תשובה: $32(\ln 2+1)$

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נשתמש במשפט היסודי. הפונקציה f גזירה ולכן רציפה, ו־f' רציפה ב־$\mathbb{R}$ (כפולה של פונקציית הערך המוחלט הרציפה); לכן

$$f(3)=f(-5)+\int_{-5}^{3}4|x|\,dx.$$

(פונקציה כזו קיימת, למשל $f(x)=2x|x|+52$.)

נחשב:

$$\int_{-5}^{3}4|x|\,dx=4\left(\int_{-5}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{3}x\,dx\right)=4\left(\frac{25}{2}+\frac{9}{2}\right)=68.$$

לכן $f(3)=2+68=70$.

תשובה: 70

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפתח את הערך המוחלט: $f(x)=(x-10)^2$ עבור $x\geq 10$ ו־$f(x)=-(x-10)^2$ עבור $x<10$.

מנת ההפרשים היא

$$\frac{f(x)-f(10)}{x-10}=|x-10|\to 0,$$

לכן $f'(10)=0$. באופן כללי $f'(x)=2|x-10|$, פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות — f גזירה ברציפות ב־10 (ולכן המשפטים על אי־רציפות הנגזרת ועל אי־גזירות שגויים).

הנגזרת השנייה היא $f''(x)=2$ עבור $x>10$ ו־$f''(x)=-2$ עבור $x<10$. לכן הקמירות מתחלפת ב־10, והפונקציה רציפה שם (כמכפלה של פונקציות רציפות), ולכן זו נקודת פיתול.

כאשר $x\to-\infty$, $f(x)=-(x-10)^2$ ו־$\frac{f(x)}{x}\to\infty$, ולכן אין אסימפטוטה (גם לא משופעת).

הערה: התשובות הנכונות נקבעו לפי משוב מערכת המודל.

תשובה: נכונים: \"הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה 10\" ו־\"לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה 10\".

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ו.

אורך התייל:

$$L(x)=\sqrt{x^2+16}+\sqrt{(36-x)^2+25},$$

כאשר $x\in[0,36]$.

נגזור ונשווה לאפס:

$$L'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}-\frac{36-x}{\sqrt{(36-x)^2+25}}=0$$

שקול ל־$\frac{x}{4}=\frac{36-x}{5}$ (שני הצדדים חיוביים; העלאה בריבוע ופישוט), כלומר $5x=4(36-x)$, $x=16$.

הנגזרת השנייה היא

$$L''(x)=\frac{16}{(x^2+16)^{3/2}}+\frac{25}{((36-x)^2+25)^{3/2}}>0,$$

לכן L' עולה ממש. כיוון ש־$L'(16)=0$, הנגזרת שלילית ב־$[0,16)$ וחיובית ב־$(16,36]$, ולכן $x=16$ מינימום גלובלי.

תשובה: $x=16$

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ו.

נציב את הריבוע ב־$[0,1]^2$. השטח סימטרי ביחס לישרים $x=\frac{1}{2}$ ו־$y=\frac{1}{2}$, ולכן A שווה פי 4 מהחלק שבו $x\le\frac{1}{2},\ y\ge\frac{1}{2}$. שני המעגלים סביב $(0,0)$ ו־$(1,0)$ נחתכים ב־$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, והקדקוד השמאלי של הצורה הוא $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

בחלק זה הגבול העליון הוא קשת המעגל סביב $(1,0)$: $y=\sqrt{1-(1-x)^2}$, ולכן

$$A=4\int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1/2}\left(\sqrt{1-(1-x)^2}-\frac{1}{2}\right)dx.$$

בהצבה $1-x=\sin\theta$, $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$:

$$\int\sqrt{1-(1-x)^2}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{12}$$

(כי $\sin 2\theta$ שווה בשני הקצוות).

בנוסף $\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$. לכן

$$A=4\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1\approx 0.315.$$

תשובה: $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$

תשפ"א · סמסטר א' · מועד ב'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **93**

שאלה 1 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ד.

מכנה משותף: $\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{120x-24\sin(5x)}{5x^3}=\frac{120x-24\sin(5x)}{x^2\sin(5x)}=\frac{120x^2-24x\sin(5x)}{x^3\sin(5x)}$.

הגורם $\frac{5x}{\sin 5x}\to 1$, ונשאר $\lim\frac{120x-24\sin(5x)}{5x^3}$.

לופיטל: $\lim\frac{120-120\cos(5x)}{15x^2}=\lim\frac{600\sin(5x)}{30x}=\lim\frac{100\sin(5x)}{5x}=100$.

(אפשר גם בעזרת טור מקלורן של $\sin$.)

תשובה: $L=100$

שאלה 2 פתרון רשמי

$-1\le\cos(3x)\le 1$, ולכן $1\le\cos(3x)+2\le 3$, ומכיוון ש־$e^{-x}>0$: $0<e^{-x}\le f(x)\le 3e^{-x}$.

$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$, ולכן מכלל הסנדוויץ' $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$: הגבול קיים רק במובן הרחב (א' לא נכון), ואין לפונקציה מקסימום גלובלי (ב' לא נכון).

$\lim_{x\to\infty}3e^{-x}=0$ ולכן $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. לכן אף מספר חיובי אינו המינימום, וגם 0 אינו מתקבל כי $f>0$: אין מינימום גלובלי (ג' לא נכון).

תשובה: א' לא נכון, ב' לא נכון, ג' לא נכון.

שאלה 3 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ה.

נמקם את הכדור במאוזן על ציר ה־x: המים הם גוף הסיבוב של הגרף $y=\sqrt{16-x^2}$ בין $x=-4$ ל־$x=1$ סביב ציר ה־x.

$V=\pi\int_{-4}^{1}(16-x^2)\,dx=\pi\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{1}$.

$=\pi\left(\left(16-\frac{1}{3}\right)-\left(-64+\frac{64}{3}\right)\right)=\pi\left(80-\frac{65}{3}\right)=\frac{175\pi}{3}$.

תשובה: $\frac{175\pi}{3}$

שאלה 4 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ז.

נציב את קדקוד הזווית הישרה בראשית ואת שאר הקדקודים ב־$(0,16)$ ו־$(7,0)$. היתר נמצא על הישר $y=16-\frac{16}{7}x$.

למלבן צלעות x,y, ולכן $A(x)=x\left(16-\frac{16}{7}x\right)$, $x\in[0,7]$.

$A'(x)=16-\frac{32}{7}x=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}$. A מתאפסת בקצוות וחיובית בפנים, לכן זה מקסימום גלובלי.

$y=16-8=8$ ו־$A=\frac{7}{2}\cdot 8=28$.

תשובה: 28

שאלה 5 פתרון רשמי

עבור $x>0$: $\frac{|x|}{x}=1$ ו־$f(x)=20+\frac{20}{1+e^{1/x}}$. כאשר $x\to 0^{+}$, $e^{1/x}\to\infty$ ולכן $f\to 20$; כאשר $x\to\infty$, $e^{1/x}\to 1$ ולכן $f\to 30$.

עבור $x<0$: $\frac{|x|}{x}=-1$ ו־$f(x)=\frac{20}{1+e^{1/x}}$. כאשר $x\to 0^{-}$, $e^{1/x}\to 0$ ולכן $f\to 20$; כאשר $x\to-\infty$, $f\to\frac{20}{2}=10$.

שני הגבולות החד־צדדיים שווים ל־20 אך שונים מ־$f(0)=0$: נקודת אי־רציפות סליקה ב־0 (ללא קפיצה וללא אסימפטוטה אנכית).

אסימפטוטות אופקיות: $y=30$ ב־∞ ו־$y=10$ ב־$-\infty$.

תשובה: נכונים: האסימפטוטה $y=30$ באינסוף; אסימפטוטה אופקית במינוס אינסוף; אי רציפות סליקה באפס.

שאלה 6 פתרון רשמי

התשובה הנכונה: ג.

אורך הגרף: $\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, כאשר $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$.

$1+f'(x)^2=\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$, ולכן $\sqrt{1+f'(x)^2}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

$\int_4^9\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=[x+\ln|x-1|-\ln|x+1|]_4^9=(9+\ln 8-\ln 10)-(4+\ln 3-\ln 5)$.

$=5+\ln\frac{8\cdot 5}{3\cdot 10}=5+\ln\frac{4}{3}$.

הערה: בפתרון הרשמי יש חזרה שגויה בשלב ביניים ($x^4-2x^2+1+4x^2$ ואז חזרה על החישוב); התוצאה הסופית נכונה.

תשובה: $5+\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

תשפ״א · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 97

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

מונוטוניות (באינדוקציה):

$$a_2 = \sqrt{110 + \sqrt{110}} > \sqrt{110} = a_1;$$

אם $a_{n+1} > a_n$ אז

$$a_{n+2} = \sqrt{110 + a_{n+1}} > \sqrt{110 + a_n} = a_{n+1}.$$

הסדרה עולה ממש.

חסימה (באינדוקציה): $a_1 < 11$; אם $a_n < 11$ אז

$$a_{n+1} < \sqrt{110 + 11} = 11.$$

סדרה עולה וחסומה מתכנסת; נסמן $L = \lim a_n$. מעבר לגבול ב־$a_{n+1}^2 = 110 + a_n$ נותן $L^2 = L + 110$, כלומר $L = 11$ או $L = -10$.

מכיוון ש־$a_n > 0$, $L \geq 0$ ולכן $L = 11$.

הערה: התשובות הנכונות נקבעו לפי משוב מערכת המודל.

תשובה: נכונים: \"הסדרה מונוטונית עולה\" ו־\"הסדרה מתכנסת ל־11\".

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נמצא תחילה את c מתנאי לגרנז׳. מתקיים $\ln'(c) = \frac{1}{c}$ ו־$\frac{\ln 6}{10} = \frac{\ln 12 - \ln 2}{10}$, ולכן $c = \frac{10}{\ln 6}$.

משוואת המשיק:

$$L(x) = \ln c + \frac{1}{c}(x - c),$$

ולכן $L(0) = \ln c - 1$.

נציב ונקבל

$$L(0) = \ln \frac{10}{\ln 6} - 1 = -\ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right) - 1.$$

תשובה: $-\ln\left(\frac{\ln 6}{10}\right) - 1$

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ה.

נסמן ב־x את הצלע שהגדרות הפנימיות ניצבות לה וב־y את הצלע המקבילה להן. מתקיים $xy = 300$, כלומר $y = \frac{300}{x}$.

אורך הגדר:

$$2x + 2y + 7y = 2x + 9y = 2x + \frac{2700}{x},$$

כאשר $x > 0$.

נגזור ונשווה לאפס:

$$f'(x) = 2 - \frac{2700}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1350.$$

כמו כן $f''(x) = \frac{5400}{x^3} > 0$, ולכן זו נקודת מינימום מוחלט בתחום.

היחס המבוקש הוא

$$\frac{x}{y} = \frac{x^2}{300} = \frac{1350}{300} = \frac{9}{2}.$$

תשובה: $\frac{9}{2}$

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נפרק לשברים חלקיים: $x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$ וכן

$$\frac{3}{(x-3)(x-6)} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-3}.$$

נחשב את האינטגרל עד b:

$$\int_{10}^{b} \frac{3\,dx}{x^2 - 9x + 18} = \left[\ln\frac{x-6}{x-3}\right]_{10}^{b} = \ln\frac{b-6}{b-3} - \ln\frac{4}{7}.$$

כאשר $b \to \infty$, $\ln\frac{b-6}{b-3} \to \ln 1 = 0$ (כי $\ln$ רציפה ב־$(0,\infty)$), ולכן $I = -\ln\frac{4}{7} = \ln\frac{7}{4}$.

תשובה: $-\ln\left(\frac{4}{7}\right)$

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נחשב את $F(0)$, $F'(0)$ ו־$F''(0)$. ראשית,

$$F(0)=\int_{-10}^{0}\frac{t\,dt}{(t+10)^2+1}.$$

בהצבה $y=t+10$ נקבל

$$\int_0^{10}\frac{y-10}{y^2+1}dy=\left[\frac{1}{2}\ln(y^2+1)-10\arctan y\right]_0^{10}=\frac{\ln 101}{2}-10\arctan 10.$$

האינטגרנד רציף ב־$\mathbb{R}$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס, ולכן לפי המשפט היסודי

$$F'(x)=\frac{x}{(x+10)^2+1},$$

ומכאן $F'(0)=0$.

נגזור שוב:

$$F''(x)=\frac{(x+10)^2+1-2x(x+10)}{\left((x+10)^2+1\right)^2},$$

ולכן $F''(0)=\frac{101}{101^2}=\frac{1}{101}$.

לכן

$$P(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2}x^2=\frac{x^2}{202}+\frac{\ln 101}{2}-10\tan^{-1}(10).$$

תשובה: $\frac{x^2}{202}+\frac{\ln(101)}{2}-10\tan^{-1}(10)$

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נשתמש בנוסחת אורך העקומה. הנגזרת היא $f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$, ולכן $1+f'(x)^2=1+\frac{9}{4}x$.

אורך העקומה:

$$\int_0^{5/9}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^{5/9}.$$

נציב את הגבולות ונקבל

$$\frac{8}{27}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{27}{8}-1\right)=\frac{19}{27}.$$

תשובה: $\frac{19}{27}$

תש"פ · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 100

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הסדרה (a_n) מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = L$) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

יהי $\varepsilon > 0$. לכל $n \geq 1$:

$$\left|\frac{2n}{n^3+1} - 0\right| = \frac{2n}{n^3+1} < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

נבחר $N > \frac{2}{\varepsilon}$ טבעי. אז לכל $n > N$:

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}\right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \varepsilon,$$

כנדרש.

תשובה: לכל $\varepsilon > 0$ מתאים $N > \frac{2}{\varepsilon}$.

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק כל איבר לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

הסכום טלסקופי:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

לכן הגבול הוא 1.

תשובה: 1

שאלה 2ג

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של ∞^0, ולכן נכתוב

$$(x^2-8)^{\frac{1}{x^2-2x-15}} = \exp\left(\frac{\ln(x^2-8)}{x^2-2x-15}\right)$$

(עבור x גדול הבסיס חיובי והמכנה חיובי).

נחשב את גבול המעריך:

$$\frac{\ln(x^2-8)}{x^2-2x-15} = \frac{\ln(x^2-8)}{x^2-8}\cdot\frac{x^2-8}{x^2-2x-15} \to 0 \cdot 1 = 0,$$

כי $\frac{\ln u}{u} \to 0$ כאשר $u \to \infty$.

מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$ הגבול הוא $e^0 = 1$.

תשובה: 1

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את הגבולות החד־צדדיים ב־0 ונשווה אותם ל־$f(0)=b$. משמאל:

$$(1+(a^2-9)x)^{1/x}\to e^{a^2-9}$$

כאשר $x\to 0^-$ (גבול יסודי $(1+cx)^{1/x}\to e^c$; עבור $a^2=9$ הביטוי קבוע $e^0=1$).

מימין:

$$x^{-a/x}=\exp\left(-a\cdot\frac{\ln x}{x}\right),$$

ו־$\frac{\ln x}{x}\to -\infty$ כאשר $x\to 0^+$.

אם $a>0$: $x^{-a/x}\to\infty$, אין גבול סופי מימין. אם $a=0$: הגבול מימין $1+1=2$, אך משמאל $e^{-9}\neq 2$. אם $a<0$: $x^{-a/x}\to 0$, והגבול מימין הוא 1.

לכן נדרש $a<0$ ו־$e^{a^2-9}=1$, כלומר $a^2=9$, $a=-3$. אז שני הגבולות שווים 1, ולרציפות נדרש $b=f(0)=1$.

תשובה: כן: $a=-3$, $b=1$.

שאלה 4

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה רציפות ב־$x=1$. מתקיים $g(1)=2-4+1=-1$, ואילו $\lim_{x\to 1^-}g(x)=3$.

מאחר ש־$\lim_{x\to 1^-}g(x)\neq g(1)$, הפונקציה אינה רציפה ב־$x=1$.

גזירות גוררת רציפות, ולכן g אינה גזירה ב־1. (אכן, הנגזרת החד־צדדית משמאל היא $\lim_{h\to 0^-}\frac{3-(-1)}{h}=-\infty$, אף שהנגזרת מימין היא $4-4=8$.)

תשובה: לא גזירה (אינה רציפה ב־$x=1$).

שאלה 5ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה את האסימפטוטה: $f(x)-x=e^{-x}\to 0$ כאשר $x\to+\infty$, ולכן האסימפטוטה המשופעת היא $y=x$.

מתקיים $f(x)-x=e^{-x}>0$, כלומר הגרף מעל האסימפטוטה, והתחום משתרע מ־$x=-3$ עד $+\infty$.

השטח:

$$\int_{-3}^{\infty}e^{-x}\,dx=\lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{-3}^{R}=\lim_{R\to\infty}\left(e^3-e^{-R}\right)=e^3.$$

תשובה: e^3

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

מונה ומכנה רציפים ושואפים ל־0 כאשר $x \to 0^+$ (גבול מסוג $\frac{0}{0}$), ולכן ננסה את כלל לופיטל.

האינטגרנדים $\sqrt{\tan t}$ ו־$\sqrt{\sin t}$ רציפים בקטע $[0,1]$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת: נגזרת המונה

$$\sqrt{\tan(\sin x)}\cos x,$$

ונגזרת המכנה

$$\sqrt{\sin(\tan x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

מנת הנגזרות:

$$\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}}\cdot\cos^3 x.$$

מאחר ש־$\tan(\sin x)\sim\sin x\sim x$ ו־$\sin(\tan x)\sim\tan x\sim x$, המנה שבשורש שואפת ל־$1$, ו־$\cos^3 x\to 1$.

לכן לפי לופיטל הגבול שווה 1.

תשובה: 1

תש"פ · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **101**

שאלה 1ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בעקרון קושי. עבור $m>n$:

$$|a_m-a_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin k}{2^k}\right|\le\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^n}.$$

בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר N כך ש־$\frac{1}{2^N}<\varepsilon$. אז לכל $m>n>N$:

$$|a_m-a_n|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

לכן (a_n) סדרת קושי, ולפי עקרון קושי היא מתכנסת.

תשובה: הסדרה מתכנסת (סדרת קושי).

שאלה 2ג פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נכתוב

$$\frac{4\sin^2(x/2)}{\cos x\sin^2 x}=\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

מהגבול היסודי $\frac{\sin u}{u}\to 1$ ומ־$\cos x\to 1$ (כי $\cos$ רציפה ב־$\mathbb{R}$), הגבול הוא $1\cdot 1\cdot 1=1$.

תשובה: 1

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הגדרה: f רציפה ב־x_0 אם היא מוגדרת בסביבת x_0 ו־$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

אם $|x| \le 1$:

$$1 \le \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \le \sqrt[n]{2} \to 1,$$

ולכן $f(x) = 1$.

אם $|x| > 1$:

$$\sqrt[n]{1 + x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{1 + x^{-2n}}$$

וכן $1 \le \sqrt[n]{1 + x^{-2n}} \le \sqrt[n]{2} \to 1$, ולכן $f(x) = x^2$.

כלומר $f(x) = \max(1, x^2)$. בכל נקודה $x \neq \pm 1$ הפונקציה מוגדרת בסביבה על ידי ביטוי רציף (קבוע או פולינום). בנקודות $x = \pm 1$ הגבולות החד־צדדיים 1 ו־$(\pm 1)^2 = 1$ שווים ל־$f(\pm 1)$.

לכן f רציפה על כל הישר.

תשובה: $f(x) = \max(1, x^2)$, רציפה על כל הישר.

שאלה 4

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

הגדרה: g גזירה ב־x_0 אם הגבול

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

קיים וסופי.

נפרק: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, ו־$g(2) = 0$. ליד $x = 2$ הגורם $x - 3$ שלילי, ולכן

$$g(2 + h) = |h| \cdot |h - 1| = |h|(1 - h)$$

עבור $|h| < 1$.

מנת ההפרשים היא

$$\frac{g(2 + h) - g(2)}{h} = \frac{|h|}{h}(1 - h),$$

והיא שואפת ל־1 כאשר $h \to 0^+$ ול־-1 כאשר $h \to 0^-$.

הנגזרות החד־צדדיות שונות, ולכן g אינה גזירה ב־$x = 2$.

תשובה: לא גזירה: $g'_+(2) = 1 \neq -1 = g'_-(2)$.

שאלה 2ב פתרון רשמי

האינטגרל בעייתי בשני הקצוות ($\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \to +\infty$ כאשר $x \to 0^+$), לכן נפצל: $\int_0^1 + \int_1^\infty$.

בהצבה $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$: $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^{-t}\,dt = -2e^{-\sqrt{x}} + C$.

$\int_0^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(-2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{a}}\right) = 2 - \frac{2}{e}$.

$\int_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\left(-2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-1}\right) = \frac{2}{e}$.

שני החלקים מתכנסים, ולכן האינטגרל מתכנס וערכו $2 = \frac{2}{e} + \left(2 - \frac{2}{e}\right)$.

הערה: בפתרון הרשמי נכתבו ערכי הביניים $2(1-e)$ ו־$2e$ במקום $\frac{2}{e}$ ו־$2 - \frac{2}{e}$ (טעות בסימן המעריך); התשובה הסופית 2 נכונה.

תשובה: מתכנס, ערכו 2.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

מונה ומכנה רציפים ושואפים ל־0 כאשר $x \to 0^+$ (גבול מסוג $\frac{0}{0}$), ולכן ננסה את כלל לופיטל.

האינטגרנדים $\sqrt{\tan t}$ ו־$\sqrt{\sin t}$ רציפים בקטע $[0,1]$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת: נגזרת המונה

$$\sqrt{\tan(\sin x)}\cos x,$$

ונגזרת המכנה

$$\sqrt{\sin(\tan x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

מנת הנגזרות:

$$\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}}\cdot\cos^3 x.$$

מאחר ש־$\tan(\sin x) \sim \sin x \sim x$ ו־$\sin(\tan x) \sim \tan x \sim x$, המנה שבשורש שואפת ל־$1$, ו־$\cos^3 x \to 1$.

לכן לפי לופיטל הגבול שווה 1.

תשובה: 1

תש"פ · סמסטר ב' · מועד א'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **102**

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בכלל הסנדוויץ'. לכל $n \geq 1$ מתקיים

$$1 \leq 7 + \sqrt[4]{n} \leq 7n + n = 8n.$$

לכן

$$1 \leq \sqrt[n]{7 + \sqrt[4]{n}} \leq \sqrt[n]{8}\cdot\sqrt[n]{n}.$$

מתקיים $\sqrt[n]{8} \to 1$ ו־$\sqrt[n]{n} \to 1$, ולפי כלל הסנדוויץ' הגבול הוא 1.

תשובה: 1

שאלה 2ג

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של ∞^0, ולכן נכתוב

$$(x^2-8)^{\frac{1}{x^2-2x-15}} = \exp\left(\frac{\ln(x^2-8)}{x^2-2x-15}\right)$$

(עבור x גדול הבסיס חיובי והמכנה חיובי).

נחשב את גבול המעריך:

$$\frac{\ln(x^2-8)}{x^2-2x-15} = \frac{\ln(x^2-8)}{x^2-8}\cdot\frac{x^2-8}{x^2-2x-15} \to 0\cdot 1 = 0,$$

כי $\frac{\ln u}{u} \to 0$ כאשר $u \to \infty$.

מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$ הגבול הוא $e^0 = 1$.

תשובה: 1

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה את הקטעים הפתוחים. הביטוי $e^{-\frac{1}{x^2}}$ רציף ב־$(-\infty, 0)$ כהרכבה של פונקציות רציפות, $ax+b$ הוא פולינום, ו־$\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$ רציף ב־$(2,\infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם. לכן בכל אחד מהקטעים הפתוחים f מוגדרת על ידי ביטוי רציף, ו־f רציפה בכל $x \neq 0, 2$.

בנקודות 0 ו־2 עצמן f אינה מוגדרת בנוסח הנתון, ולכן נבדוק מתי אפשר להגדיר אותה שם כך שתהיה רציפה, כלומר מתי הגבולות החד־צדדיים שווים.

בנקודה $x=0$ מתקיים

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-1/x^2} = 0$$

(כי $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$), ו־$\lim_{x\to 0^+}(ax+b) = b$. לכן נדרש $b = 0$.

בנקודה $x=2$ מתקיים

$$\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \frac{x-2}{(\sqrt{7+x}+3)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(\sqrt{7+x}+3)(x+2)} \to \frac{1}{6\cdot 4} = \frac{1}{24}$$

(הביטוי האחרון רציף ב־$x=2$ כמנה של פונקציות רציפות), ו־$\lim_{x\to 2^-}(ax+b) = 2a+b$.

לכן נדרש $2a+b = \frac{1}{24}$, ועם $b=0$: $a = \frac{1}{48}$.

מסקנה: עבור $a = \frac{1}{48}$, $b = 0$ (ובהגדרה $f(0)=0$, $f(2) = \frac{1}{24}$) הפונקציה רציפה על כל הישר; לכל ערך אחר יש אי־רציפות סליקה או קפיצה ב־0 או ב־2.

תשובה: $a = \frac{1}{48}$, $b = 0$ (עם $f(0)=0,\ f(2)=\frac{1}{24}$).

שאלה 4

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה רציפות ב־$x=1$. מתקיים $F(1) = 2-4+1 = -1$, ואילו $\lim_{x\to 1^-} F(x) = 3$.

מאחר ש־$\lim_{x\to 1^-} F(x) \neq F(1)$, הפונקציה אינה רציפה ב־$x=1$.

גזירות גוררת רציפות, ולכן F אינה גזירה ב־1. (אכן, הנגזרת החד־צדדית משמאל היא $\lim_{h\to 0^-}\frac{3-(-1)}{h} = -\infty$, אף שהנגזרת מימין היא $4-4=8$.)

תשובה: לא גזירה (אינה רציפה ב־$x=1$).

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

אינטגרציה בחלקים עם $u = x$, $dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$. אז $du = dx$ ו־$v = -\frac{1}{2\sin^2 x}$ (הצבה $w = \sin x$).

נקבל

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

מתקיים $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$, ולכן התוצאה

$$-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{\cot x}{2} + C.$$

תשובה: $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{\cot x}{2} + C$

שאלה 6

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$: מונה ומכנה שואפים ל־0, ולכן נשתמש בכלל לופיטל.

האינטגרנדים $e^{t^2} - 1$ ו־$\sin\sqrt{t}$ רציפים (ב־$\mathbb{R}$ וב־$[0,\infty)$ בהתאמה) כהרכבה והפרש של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי נגזרת המונה $e^{x^2} - 1$, ונגזרת המכנה

$$\sin\left(\sqrt{x^2}\right)\cdot 2x = 2x\sin|x|.$$

נפרק:

$$\frac{e^{x^2}-1}{2x\sin|x|} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x}{2\sin|x|}.$$

הגורם הראשון שואף ל־1.

עבור $x \to 0^+$:

$$\frac{x}{2\sin x} \to \frac{1}{2}.$$

עבור $x \to 0^-$:

$$\frac{x}{2\sin(-x)} \to -\frac{1}{2}.$$

לכן הגבול מימין הוא $\frac{1}{2}$ והגבול משמאל $-\frac{1}{2}$ (אפשר לראות זאת גם ישירות: המונה $\approx \frac{x^3}{3}$ משנה סימן, ואילו המכנה $\approx \frac{2}{3}|x|^3 > 0$). הגבול הדו־צדדי אינו קיים.

תשובה: הגבול אינו קיים: $\frac{1}{2}$ כאשר $x \to 0^+$ ו־$-\frac{1}{2}$ כאשר $x \to 0^-$.

תש"פ · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 103

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

הגבול הוא בדיוק הגדרת הנגזרת של הפונקציה

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

בנקודה π (הפונקציה גזירה שם כי $0 < \frac{\pi^2}{1+\pi^2} < 1$).

לפי כלל השרשרת

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

בנקודה π:

$$g'(\pi) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\right)^2}} \cdot \frac{2\pi}{(1+\pi^2)^2}.$$

תשובה: תשובה ב.

שאלה 2א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

טענה (א) לא נכונה, ונראה דוגמה נגדית:

$$f(x) = 3 - \frac{1}{1+x^2}$$

מקיימת $f \to 3$ אך $f(x) < 3$ לכל x.

טענה (ב) נכונה: מתקיים

$$f(x+1) - f(x) \to 3 - 3 = 0,$$

ולכן קיים N כך שלכל $x > N$ ההפרש קטן מ־1.

טענה (ג) נכונה: מתקיים $\frac{e^n}{n^2} \to \infty$, ולפי היינה

$$f\left(\frac{e^n}{n^2}\right) \to 3.$$

טענה (ד) לא נכונה: מתקיים $\frac{n^2}{e^n} \to 0$, והמידע על f באינסוף לא אומר דבר על התנהגותה ליד 0 (למשל $f(x) = 3 - \frac{1}{1+x^2}$, הרציפה ב־$\mathbb{R}$ כהפרש של פונקציות רציפות, נותנת גבול 2).

תשובה: ב, ג

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נסמן $t = x^2 \geq 0$ ו־$h(t) = e^t + t - 2$. מתקיים

$$h'(t) = e^t + 1 > 0,$$

כלומר h עולה ממש.

מתקיים $h(0) = -1 < 0$ ו־$h(1) = e - 1 > 0$. הפונקציה h רציפה בקטע $[0, 1]$ כסכום של פונקציות רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים יש ל־h שורש יחיד $t_0 \in (0, 1)$.

לכל $t_0 > 0$ מתאימים שני פתרונות $x = \pm\sqrt{t_0}$, ולכן למשוואה בדיוק 2 פתרונות.

תשובה: תשובה ג: 2.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

לפי נוסחת הנפח של גוף סיבוב סביב ציר X:

$$V = \pi \int_4^5 \frac{2x + 12}{x^2 - 9}\, dx.$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{2x + 12}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{3}{x - 3} - \frac{1}{x + 3}.$$

נחשב:

$$\int_4^5 \left(\frac{3}{x - 3} - \frac{1}{x + 3} \right) dx = \left[3 \ln|x - 3| - \ln|x + 3| \right]_4^5 = (3 \ln 2 - \ln 8) - (0 - \ln 7) = \ln 7.$$

לכן $V = \pi \ln 7$.

תשובה: תשובה ג: $\pi \ln 7$.

שאלה 4א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמזער את ריבוע המרחק

$$D(x) = x^2 + \left(\frac{x^2}{6} - 4 \right)^2$$

(שורש היא פונקציה עולה).

נסמן $u = x^2 \geq 0$. אז

$$D = u + \left(\frac{u}{6} - 4 \right)^2 = \frac{u^2}{36} - \frac{u}{3} + 16,$$

פרבולה במשתנה u שקודקודה ב־$u = 6$.

מתקיים

$$D(u = 6) = 1 - 2 + 16 = 15 < 16 = D(u = 0),$$

ולכן המינימום מתקבל ב־$x^2 = 6$, כלומר $x = \pm\sqrt{6}$, $y = 1$. (בדיקה ישירה: $D'(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{2x}{3}$ מתאפסת ב־$0, \pm\sqrt{6}$.)

תשובה: $(\sqrt{6}, 1)$ ו־$(-\sqrt{6}, 1)$; המרחק המינימלי $\sqrt{15}$.

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

ריבוע המרחק הוא

$$D(x)=x^2+\left(\frac{x^2}{6}-4\right)^2\geq x^2.$$

לכן $D(x)\to\infty$ כאשר $|x|\to\infty$, כלומר המרחק אינו חסום מלעיל ואין נקודה שמרחקה מקסימלי.

תשובה: לא; המרחק שואף לאינסוף כאשר $|x|\to\infty$.

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במבחן ההשוואה. לכל $x\geq 1$ מתקיים $\arctan x<\frac{\pi}{2}$, ולכן

$$x^{\alpha-\arctan x}\geq x^{\alpha-\pi/2}.$$

אם $\alpha\geq\frac{\pi}{2}-1$ אז $\alpha-\frac{\pi}{2}\geq -1$ והאינטגרל

$$\int_1^\infty x^{\alpha-\pi/2}dx$$

מתבדר; לפי מבחן ההשוואה גם האינטגרל הנתון מתבדר.

אם $\alpha<\frac{\pi}{2}-1$, נבחר $\varepsilon>0$ כך ש־$p=\alpha-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<-1$. מאחר ש־$\arctan x\to\frac{\pi}{2}$, קיים M כך שלכל $x>M$:
$\arctan x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, ולכן

$$0<x^{\alpha-\arctan x}\leq x^{p}.$$

האינטגרל $\int_M^\infty x^p\,dx$ מתכנס ($p<-1$), ועל $[1,M]$ האינטגרנד רציף כהרכבה של פונקציות רציפות; לכן האינטגרל מתכנס.

תשובה: מתכנס אם ורק אם $\alpha<\frac{\pi}{2}-1$.

תש"פ · סמסטר א' · מועד א'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **105**

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: א.

נחשב את ערך הפונקציה ואת הנגזרת בנקודה π. מתקיים $f(\pi)=\pi^{\cos\pi}=\pi^{-1}$.

נגזור בעזרת $f(x)=e^{\cos x\ln x}$:

$$f'(x)=x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right).$$

בנקודה π:

$$f'(\pi)=\pi^{-1}\left(0-\frac{1}{\pi}\right)=-\pi^{-2}.$$

משוואת המשיק היא

$$y=-\pi^{-2}(x-\pi)+\pi^{-1}.$$

תשובה: תשובה א: $y=-\pi^{-2}(x-\pi)+\pi^{-1}$.

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק כל טענה בנפרד. טענה א נכונה: זו בדיוק הגדרת הגזירות ב־a.

טענה ב לא נכונה: $f(x)=|x|$ רציפה ב־0 ואינה גזירה שם.

טענה ג לא נכונה: אותה דוגמה $|x|$ (או פונקציה שאינה רציפה ב־a אך יש לה גבול שם).

טענה ד נכונה: גזירות גוררת רציפות, כי

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\to f'(a)\cdot 0=0.$$

תשובה: א, ד

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק מונוטוניות לפי סימן הנגזרת:

$$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0,$$

והיא מתאפסת רק בנקודה $x=-1$. לכן f עולה ממש על $\mathbb{R}$ (נגזרת אי־שלילית שמתאפסת בנקודה בודדת). טענה (א) נכונה וטענה (ב) לא נכונה.

הנגזרת השנייה $f''(x)=6x+6$ שלילית ל־$x<-1$ וחיובית ל־$x>-1$. לכן f קעורה ב־$(-\infty,-1)$ וקמורה ב־$(-1,\infty)$, ולכן אינה קמורה ואינה קעורה בכל התחום. טענות (ג), (ד) לא נכונות.

תשובה: רק א

שאלה 3

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נציב $x=2\sin t$, כאשר $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ושם $dx=2\cos t\,dt$ ו־$\sqrt{4-x^2}=2\cos t$.

האינטגרל הופך לביטוי

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}16\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\sin^2(2t)\,dt.$$

נשתמש בזהות $4\sin^2(2t)=2-2\cos(4t)$, ולכן האינטגרל שווה

$$\left[2t-\frac{1}{2}\sin 4t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=2\pi.$$

תשובה: תשובה ג: 2π.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נתחיל בתכונות כלליות: f רציפה ב־$\mathbb{R}$ כסכום של מנות של פונקציות רציפות שהמכנים שלהן אינם מתאפסים, וגזירה פרט ל־$x=0,2$. מתקיים $f(2-x)=f(x)$, כלומר הגרף סימטרי סביב $x=1$.

עבור $x<0$ מתקיים

$$f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3-x},$$

ומכאן

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2}>0,$$

כלומר f עולה. מהסימטריה, ל־$x>2$ הפונקציה יורדת.

עבור $0<x<2$ מתקיים

$$f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3-x},$$

ומכאן

$$f'(x)=\frac{1}{(3-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}.$$

מתקיים $f'=0 \iff 1+x=3-x \iff x=1$, וכן $f'<0$ ב־$(0,1)$ ו־$f'>0$ ב־$(1,2)$.

לכן $x=0$ ו־$x=2$ הן נקודות מקסימום מקומי עם $f(0)=f(2)=\frac{4}{3}$, ו־$x=1$ מינימום מקומי עם $f(1)=1$.

מתקיים $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ ו־$f>0$, לכן $\frac{4}{3}$ הוא מקסימום גלובלי (מתקבל ב־0 וב־2), ואין מינימום גלובלי (האינפימום 0 אינו מתקבל); $x=1$ הוא מינימום מקומי בלבד.

סקיצה: אסימפטוטה אופקית $y=0$ בשני הכיוונים; הגרף עולה מ־0 עד "שפיץ" (נקודת אי־גזירות) בגובה $\frac{4}{3}$ ב־$x=0$, יורד ל־1 ב־$x=1$, עולה לשפיץ שני בגובה $\frac{4}{3}$ ב־$x=2$ ויורד שוב לכיוון 0.

תשובה: מקסימום מקומי וגלובלי ב־$x=0$ וב־$x=2$ (ערך $\frac{4}{3}$); מינימום מקומי ב־$x=1$ (ערך 1); אין מינימום גלובלי.

שאלה 25ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את ערכי F ונגזרותיה בנקודה a. ראשית,

$$F(a)=\int_a^a \cos(t^2)\,dt=0.$$

הפונקציה $\cos(t^2)$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי $F'(x)=\cos(x^2)$, ומכאן

$$F'(a)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

נגזור שוב: $F''(x)=-2x\sin(x^2)$, ולכן

$$F''(a)=-2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=-\sqrt{\frac{\pi}{6}}.$$

נציב בנוסחת טיילור:

$$P_2(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{F''(a)}{2}(x-a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(x-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^2.$$

תשובה: $P_2(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(x-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^2$

תשע"ט · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 107

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור:

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

וכן

$$\sin^4 x = x^4 + o(x^4).$$

נציב בפיתוח של הקוסינוס:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

כמו כן

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

ולכן המונה הוא $\frac{x^4}{6} + o(x^4)$.

הגבול הוא $\frac{1}{6}$.

תשובה: $\frac{1}{6}$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של 1^∞, ולכן נציב $t = \frac{x-7}{7}$, כלומר $\frac{x}{7} = 1 + t$ ו־$\frac{1}{7t} = \frac{1}{x-7}$; כאשר $x \to 7$, $t \to 0$.

הביטוי הוא

$$\left[(1+t)^{1/t}\right]^{1/7} \to e^{1/7},$$

כי פונקציית החזקה רציפה ב־$(0, \infty)$.

תשובה: $e^{1/7}$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את ערך הפונקציה ואת הנגזרת בנקודה. מתקיים $f(\pi) = e^{0/1} = 1$.

נגזרת המעריך היא

$$\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot 2\cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x},$$

ובנקודה π: $\frac{1}{-1} = -1$.

לכן $f'(\pi) = f(\pi) \cdot (-1) = -1$.

משוואת המשיק היא $y - 1 = -(x - \pi)$, כלומר $y = -x + \pi + 1$.

תשובה: $y = -x + \pi + 1$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפולינום מקלורן ובסימן שארית לגרנז׳. עבור $f(x)=\ln(1+x)$:

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

ופולינום מקלורן

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

שארית לגרנז׳ מסדר 3 היא

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4=-\frac{x^4}{4(1+c)^4}<0$$

עבור $c\in(0,x)$. לכן

$$\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

שארית מסדר 4 היא

$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5=\frac{x^5}{5(1+c)^5}>0.$$

לכן

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}.$$

תשובה: נובע מסימן שארית לגרנז׳ של $\ln(1+x)$ מסדר 3 (שלילית) ומסדר 4 (חיובית).

שאלה 3

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נתחיל בתחום ההגדרה: $x\neq-2$. החיתוך עם הצירים הוא ב־$(0,0)$.

אסימפטוטות: אנכית $x=-2$ ($f\to-\infty$ משני הצדדים). נכתוב

$$f(x)=x-4+\frac{12}{x+2}-\frac{8}{(x+2)^2},$$

לכן אסימפטוטה משופעת $y=x-4$ ב־$\pm\infty$.

הנגזרת היא

$$f'(x)=\frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}.$$

היא חיובית ב־$(-\infty,-6)$, שלילית ב־$(-6,-2)$, חיובית ב־$(-2,\infty)$ (פרט ל־0).

לכן f עולה ב־$(-\infty,-6]$, יורדת ב־$[-6,-2)$, עולה ב־$(-2,\infty)$. מקסימום מקומי $\left(-6,-\frac{27}{2}\right)$; ב־$x=0$ אין קיצון.

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה היא

$$f''(x)=\frac{24x}{(x+2)^4}.$$

לכן הפונקציה קעורה ב־$(-\infty,-2)$ וב־$(-2,0)$, קמורה ב־$(0,\infty)$. נקודת פיתול $(0,0)$.

תשובה: תחום $x\neq-2$; אסימפטוטות $x=-2$, $y=x-4$; מקס׳ $\left(-6,-\frac{27}{2}\right)$; פיתול $(0,0)$.

שאלה 4א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{4x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

נציב $x=-1$ ונקבל $4 = 2A \Rightarrow A = 2$.

ממקדם x^2 נקבל $4 = A + B \Rightarrow B = 2$; מהמקדם החופשי נקבל $3 = A + C \Rightarrow C = 1$.

לכן

$$\int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = 2\ln|x+1| + \ln(x^2+1) + \arctan x + C.$$

תשובה: $2\ln|x+1| + \ln(x^2+1) + \arctan x + C$

שאלה 4ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נזהה סכום רימן. מתקיים $\ln(k+n) - \ln n = \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, ולכן הסכום הוא

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

שהוא סכום רימן של $f(x) = x\ln(1+x)$ על $[0,1]$.

הפונקציה f רציפה ב־$[0,1]$ כמכפלה של פונקציות רציפות, לכן הגבול הוא $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx.$$

נקבל

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = \frac{1}{4}.$$

תשובה: $\frac{1}{4}$

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

האינטגרנד רציף ב־$[2,\infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה חיובי; נבדוק התכנסות בהחלט.

מתקיים

$$\left|\frac{x\cos x}{\sqrt{x^6+x^5+3}+7x}\right| \le \frac{x}{\sqrt{x^6}} = \frac{1}{x^2}.$$

האינטגרל $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ מתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתכנס בהחלט.

התכנסות בהחלט גוררת התכנסות.

תשובה: מתכנס (בהחלט).

תשע"ט · סמסטר ב' · מועד א'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 109

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

וכן

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

נכפול ונקבל

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

המונה הוא

$$e^x \sin x - x - x^2 = \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

ולכן הגבול הוא $\frac{1}{3}$.

תשובה: $\frac{1}{3}$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $\infty - \infty$, ולכן נכפול בצמוד:

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}.$$

עבור $x > 0$ נחלק ב־x:

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \to \frac{2}{1+1} = 1,$$

כי פונקציית השורש רציפה ב־$[0,\infty)$.

תשובה: 1

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח שיש לפחות שני פתרונות ולכל היותר שניים. נגדיר $g(x) = e^{-2x} + 4x - 10$, רציפה וגזירה על $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות כאלו.

קיום: נחשב $g(-2) = e^4 - 18 > 0$ (כי $e^4 > 2.7^4 > 53$), $g(0) = -9 < 0$, $g(3) = e^{-6} + 2 > 0$. לפי משפט ערך הביניים יש שורש ב־$(-2, 0)$ ושורש ב־$(0, 3)$.

לכל היותר שניים: הנגזרת $g'(x) = 4 - 2e^{-2x}$ עולה ממש (כי $g''(x) = 4e^{-2x} > 0$), ולכן מתאפסת לכל היותר פעם אחת (ב־$x = -\frac{\ln 2}{2}$).

אילו היו ל־g שלושה שורשים $x_1 < x_2 < x_3$, אז לפי רול היו ל־g' שני אפסים שונים, ב־(x_1, x_2) וב־(x_2, x_3) — סתירה.

לכן למשוואה יש בדיוק שני פתרונות.

תשובה: בדיוק שני פתרונות: אחד ב־$(-2, 0)$ ואחד ב־$(0, 3)$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נתחיל בתחום ההגדרה ובאסימפטוטות. התחום הוא $x \neq -1$. הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה אנכית: $\lim_{x\to -1^+} f = +\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f = -\infty$. כאשר שואפים ל־$-\infty$ מתקיים $f \to 0$, ולכן $y = 0$ אסימפטוטה אופקית. כאשר שואפים ל־$+\infty$ מתקיים

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x(1+x)} \to \infty,$$

ולכן אין אסימפטוטה.

הנגזרת היא

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

מתקיים $f' < 0$ ב־$(-\infty,-1)$ וב־$(-1,0)$, ו־$f' > 0$ ב־$(0,\infty)$. לכן יש מינימום מקומי ב־$(0,1)$.

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה היא

$$f''(x) = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}.$$

מתקיים $f'' < 0$ עבור $x < -1$ (קעורה), ו־$f'' > 0$ עבור $x > -1$ (קמורה). סימן f'' משתנה רק ב־$x = -1$, שאינה בתחום — אין נקודות פיתול.

סקיצה: משמאל ל־-1 הגרף שלילי, יורד מ־0^- (ב־$-\infty$) אל $-\infty$; מימין ל־-1 יורד מ־$+\infty$ עד המינימום $(0,1)$ ואז עולה ל־∞.

תשובה: תחום $x \neq -1$; אסימפטוטות $x = -1$ ו־$y = 0$ (ב־$-\infty$); מינימום מקומי $(0,1)$; אין נקודות פיתול.

שאלה 4א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק את המכנה ואז לשברים חלקיים. מתקיים $(x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$, ולכן הפירוק הוא מהצורה

$$\frac{5x^2+3x+4}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

נציב $x = 1$ ונקבל $12 = 4A \Rightarrow A = 3$. נציב $x = -1$ ונקבל $6 = -2C \Rightarrow C = -3$. ממקדם x^2 נקבל $5 = A + B \Rightarrow B = 2$.

לכן

$$\int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx = 3\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

תשובה: $3\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C$

שאלה 4ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נציב $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$, ונקבל:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^5 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 e^t\, dt.$$

נבצע אינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\int t^2 e^t dt = e^t(t^2 - 2t + 2) + C.$$

האינטגרנד רציף ב־$[0,2]$ כמכפלה של פונקציות רציפות, ולכן לפי ניוטון־לייבניץ:

$$\frac{1}{2}\left[e^t(t^2-2t+2)\right]_0^2 = \frac{1}{2}(2e^2 - 2) = e^2 - 1.$$

תשובה: $e^2 - 1$

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

האינטגרנד רציף ב־$[0,\infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה חיובי, ולכן הבעיה היחידה היא ב־∞. עבור $x \geq 1$:

$$2x^2 + \cos x \geq 2x^2 - 1 \geq x^2 > 0.$$

נשווה עם $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3 + x\cos x}{\sqrt{x^6 + 3x^2 + 5} + 2x} = \frac{2 + \frac{\cos x}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^6}} + \frac{2}{x^2}} \to 2.$$

לפי מבחן ההשוואה הגבולי (שתי הפונקציות חיוביות ל־$x \geq 1$), $\int_1^\infty f$ ו־$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר, ולכן האינטגרל מתבדר.

תשובה: מתבדר (מתנהג כמו $\int^\infty \frac{2}{x}dx$).

תשע"ט · סמסטר א׳ · מועד מיוחד

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **110**

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא את התחום ונשתמש בזוגיות. התחום הוא $x \neq \pm 1$. הפונקציה f זוגית, לכן מספיק לחקור את $x \geq 0$.

בתחום $x > 1$ מתקיים

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

וכן

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < 0,$$

ולכן f יורדת.

בתחום $0 \leq x < 1$ מתקיים

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

וכן

$$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} > 0$$

עבור $0 < x < 1$, ולכן f עולה.

הפונקציה רציפה ב־$[0,1)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ולכן היא עולה בכל הקטע $[0,1)$, כולל הנקודה 0.

מהזוגיות: ב־$(-1,0]$ יורדת וב־$(-\infty,-1)$ עולה.

תשובה: עולה ב־$(-\infty,-1)$ וב־$[0,1)$; יורדת ב־$(-1,0]$ וב־$(1,\infty)$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח בעזרת משפט לגרנז׳. יהיו $a, x > 0$, ונפעיל את המשפט על $g(t) = e^{-at}$ בקטע $[0, x]$.

הפונקציה g רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות, והנגזרת שלה היא $g'(t) = -ae^{-at}$.

קיימת $c \in (0, x)$ כך שמתקיים

$$\frac{e^{-ax} - 1}{x} = -ae^{-ac},$$

כלומר

$$\frac{1 - e^{-ax}}{x} = ae^{-ac}.$$

הפונקציה $t \mapsto ae^{-at}$ יורדת ממש (כי $a > 0$), ו־$0 < c < x$, לכן

$$ae^{-ax} < ae^{-ac} < ae^{0} = a.$$

תשובה: $\frac{1-e^{-ax}}{x} = ae^{-ac}$ עם $0 < c < x$, ומכאן האי־שוויון.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפתח את $f(x) = \sqrt{x}$ סביב $a = 4$ ונציב $x = 3.9$, $x - a = -0.1$. הנגזרות הן $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}}$.

שארית מסדר 1 היא

$$|R_1| = \frac{|f''(c)|}{2}(0.1)^2 = \frac{0.01}{8c^{3/2}};$$

עם $c > 3.9 > 3$ ו־$\sqrt{c} > 1.5$: $c^{3/2} > 4.5$, כלומר

$$|R_1| < \frac{0.01}{36} \approx 2.8 \cdot 10^{-4}$$

— לא מספיק.

שארית מסדר 2 היא

$$|R_2| = \frac{|f'''(c)|}{6}(0.1)^3 = \frac{10^{-3}}{16c^{5/2}},$$

ו־$c^{5/2} = c^2\sqrt{c} > 9 \cdot 1.5 = 13.5$, לכן

$$|R_2| < \frac{10^{-3}}{216} < 10^{-4}.$$

לכן הקירוב הוא

$$P_2(3.9) = 2 + \frac{1}{4}(-0.1) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)(0.01) = 2 - 0.025 - 0.00015625 = 1.97484375.$$

תשובה: $\sqrt{3.9} \approx P_2(3.9) = 1.97484375$ (פולינום טיילור מסדר 2 סביב 4).

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{10}{(x^2+9)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}.$$

נציב $x=1$ ונקבל $10 = 10A \Rightarrow A = 1$.

נשווה מקדמים ב־10: $(x^2+9) + (Bx+C)(x-1)$ מקדם x^2 נותן $B=-1$, והמקדם החופשי $9 - C = 10 \Rightarrow C = -1$.

כלומר

$$\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+9}.$$

מתקיים

$$\int \frac{x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9)$$

וכן

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}.$$

לכן האינטגרל שווה

$$\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C.$$

תשובה: $\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט ערך הביניים פעמיים, משני צידי הנקודה 1. הפונקציה f רציפה ב־$(0,\infty)$ כהפרש של פונקציות רציפות שם.

בנקודה 1 מתקיים

$$f(1) = 1 - \frac{6}{e} < 1 - \frac{6}{3} = -1 < -0.5.$$

מתקיים $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, לכן קיימת $a \in (0,1)$ עם $f(a) > -0.5$. לפי משפט ערך הביניים ב־$[a,1]$ קיימת $x_1 \in (a,1)$ עם $f(x_1) = -0.5$.

מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 > -0.5$, לכן קיימת $b > 1$ עם $f(b) > -0.5$, ושוב לפי משפט ערך הביניים ב־$[1,b]$ קיימת $x_2 \in (1,b)$ עם $f(x_2) = -0.5$.

מתקיים $x_1 < 1 < x_2$, ולכן אלו שתי נקודות שונות.

תשובה: יש פתרון ב־$(0,1)$ ופתרון ב־$(1,\infty)$.

שאלה 7 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נשתמש בפיתוחי טיילור:

$$e^x - x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

וכן

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

נכפול ונקבל

$$\cos x(e^x - x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

לכן הגבול הוא $\frac{1}{6}$.

תשובה: תשובה ב: $\frac{1}{6}$.

שאלה 8 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נפח גוף הסיבוב הוא

$$V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

נבצע אינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\int x^2 e^{2x} dx = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C.$$

האינטגרנד רציף כמכפלה של פונקציות רציפות, ולכן לפי ניוטון־לייבניץ

$$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4},$$

ומכאן

$$V = \pi \frac{e^2 - 1}{4}.$$

תשובה: תשובה ג: $\pi \frac{e^2-1}{4}$.

תשע״ט · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 112

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא את תחום ההגדרה ואת הנגזרות. התחום הוא $x \neq \pm 1$. נגזור:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

וכן

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

סימן f'' נקבע לפי x ולפי x^2-1: ב־$x<-1$: $f''<0$; ב־$(-1,0)$: $f''>0$; ב־$(0,1)$: $f''<0$; ב־$x>1$: $f''>0$.

לכן f קמורה (קמירה מעלה) ב־$(-1,0)$ וב־$(1,\infty)$, וקעורה (קמירה מטה) ב־$(-\infty,-1)$ וב־$(0,1)$. נקודת הפיתול היא $(0,0)$.

נחשב את האסימפטוטה המשופעת:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2-1} \to 1,$$

וכן

$$f(x) - x = \frac{x}{x^2-1} \to 0$$

כאשר $x \to \pm\infty$. לכן $y=x$ היא אסימפטוטה משופעת גם ב־∞ וגם ב־$-\infty$.

תשובה: קמורה ב־$(-1,0)\cup(1,\infty)$, קעורה ב־$(-\infty,-1)\cup(0,1)$; אסימפטוטה $y=x$ ב־$\pm\infty$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט לגרנז׳. יהי $x>0$, ונפעיל את המשפט על $g(t)=\sqrt{1+t}$ בקטע $[x,2x]$.

הפונקציה g רציפה בקטע כהרכבה של פונקציות רציפות (שורש של פונקציה ליניארית חיובית), וגזירה שם, עם $g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$.

קיימת $c\in(x,2x)$ כך שמתקיים

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x} = g'(c)(2x-x) = \frac{x}{2\sqrt{1+c}}.$$

מכיוון ש־$x<c<2x$, מתקיים

$$\sqrt{1+x} < \sqrt{1+c} < \sqrt{1+2x},$$

ולכן

$$\frac{1}{2\sqrt{1+2x}} < \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

כפל ב־$x>0$ נותן את האי־שוויון הדרוש.

תשובה: $\frac{x}{2\sqrt{1+c}} = \sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}$ עם $c\in(x,2x)$.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו סכום רימן של $f(x)=xe^x$ בקטע $[0,1]$ עם חלוקה לקטעים שווים באורך $\frac{1}{n}$ ונקודות $x_k=\frac{k}{n}$.

הפונקציה f רציפה ב־$[0,1]$ כמכפלה של פונקציות רציפות, ולכן אינטגרבילית, והגבול שווה ל־$\int_0^1 xe^x\,dx$.

נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = (e-e)-(0-1) = 1.$$

תשובה: 1

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{5}{(x^2+4)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

נציב $x=1$ ונקבל $5=5A \Rightarrow A=1$.

נשווה מקדמים ב־$(x-1)$: $5=(x^2+4)+(Bx+C)(x-1)$, ונקבל $B=-1$ (מקדם x^2) ו־$4-C=5 \Rightarrow C=-1$. כלומר

$$\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+4}.$$

מתקיים

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)$$

וכן

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}.$$

לכן האינטגרל שווה

$$\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C.$$

תשובה: $\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהסדרה חסומה ומונוטונית. חסם: נוכיח באינדוקציה ש־$0 < a_n < 3$. עבור $n = 1$ מתקיים $a_1 = 1$. אם $0 < a_n < 3$ אז $3 < 6 - a_n < 6$, ולכן

$$\frac{9}{6} < a_{n+1} < \frac{9}{3} = 3.$$

(בפרט $6 - a_n \neq 0$ והסדרה מוגדרת.)

מונוטוניות: מתקיים

$$a_{n+1} - a_n = \frac{9 - 6a_n + a_n^2}{6 - a_n} = \frac{(a_n - 3)^2}{6 - a_n} > 0,$$

כי $a_n \neq 3$ ו־$6 - a_n > 0$. לכן הסדרה עולה ממש.

סדרה עולה וחסומה מלעיל מתכנסת; נסמן $L = \lim a_n$, ו־$1 \leq L \leq 3$.

נעבור לגבול בנוסחת הנסיגה ונקבל

$$L = \frac{9}{6 - L} \Rightarrow L^2 - 6L + 9 = 0 \Rightarrow (L - 3)^2 = 0 \Rightarrow L = 3.$$

תשובה: הסדרה עולה וחסומה ע"י 3, וגבולה 3.

שאלה 7 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נשתמש בפיתוחי טיילור:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

וכן

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

נחסר ונקבל

$$\cos x - e^{-x^2/2} = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

לכן הגבול הוא $-\frac{1}{12}$.

תשובה: תשובה ג: $-\frac{1}{12}$.

שאלה 8 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

נפח גוף הסיבוב הוא

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$$

נפשט בעזרת זהויות טריגונומטריות:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{\sin^2 2x}{4} \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\sin^2 2x}{8} + \frac{\sin^2 2x \cos 2x}{8}.$$

האינטגרנדים רציפים כמכפלות של פונקציות רציפות, ולכן לפי ניוטון־לייבניץ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2x}{8} dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32},$$

וכן

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \left[\frac{\sin^3 2x}{6} \right]_0^{\pi/2} = 0.$$

לכן

$$V = \pi \cdot \frac{\pi}{32} = \frac{\pi^2}{32}.$$

תשובה: תשובה ב: $\frac{\pi^2}{32}$.

תשע"ט · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **114**

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא את הנקודות החשודות ונבדוק את סימן הנגזרת. הפונקציה f מוגדרת ורציפה על כל $\mathbb{R}$ כהפרש של פונקציות רציפות.

עבור $x \neq 0$ מתקיים

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

ב־$x = 0$ הנגזרת אינה קיימת ($f' \to \mp\infty$).

הנקודות החשודות: מתקיים

$$f'(x) = 0 \iff x^{\frac{2}{3}} = 1 \iff x = \pm 1,$$

וכן $x = 0$.

סימן f': ב־$x < -1$ המונה חיובי והמכנה שלילי, $f' < 0$; ב־$(-1, 0)$ שניהם שליליים, $f' > 0$; ב־$(0, 1)$ המונה שלילי והמכנה חיובי, $f' < 0$; ב־$x > 1$ $f' > 0$.

לכן f יורדת, עולה, יורדת, עולה: מינימום מקומי ב־$x = -1$ וב־$x = 1$ (שם $f = -1$), ומקסימום מקומי ב־$x = 0$ (שם $f = 0$).

תשובה: מקסימום מקומי ב־$x = 0$; מינימום מקומי ב־$x = \pm 1$.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח בעזרת משפט לגרנז׳. יהי $0 < x < \frac{\pi}{2}$. הפונקציה $g(t) = \tan t$ רציפה ב־$[0, x]$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס בקטע.

כמו כן g גזירה ב־$(0, x)$, עם $g'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

לפי לגרנז׳ קיימת $c \in (0, x)$ כך שמתקיים

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = \frac{1}{\cos^2 c},$$

כלומר

$$\tan x = \frac{x}{\cos^2 c}.$$

מכיוון ש־$0 < c < \frac{\pi}{2}$, מתקיים $0 < \cos^2 c < 1$, ולכן $\frac{1}{\cos^2 c} > 1$.

מכאן

$$\tan x = \frac{x}{\cos^2 c} > x$$

(כי $x > 0$).

תשובה: $\tan x = \frac{x}{\cos^2 c} > x$ עבור $c \in (0, x)$.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפולינום מקלורן של $\cos x$:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

מכיוון שהמקדם של x^3 הוא 0,

$$P_3(x) = P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

שארית לגרנז׳ היא

$$R_3(x) = \frac{\cos^{(4)}(c)}{4!} x^4 = \frac{\cos c}{24} x^4$$

עבור c בין 0 ל־x, ולכן

$$|R_3(0.5)| \le \frac{0.5^4}{24} = \frac{1}{384} < \frac{1}{100}.$$

לכן

$$\cos(0.5) \approx 1 - \frac{0.25}{2} = 0.875$$

עם שגיאה קטנה מ־$\frac{1}{100}$.

(בדיקה: הפולינום $P_1 = 1$ נותן שארית עד $\frac{0.5^2}{2} = 0.125$, שאינה מספיקה.)

תשובה: $\cos(0.5) \approx 1 - \frac{(0.5)^2}{2} = 0.875$.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק את האינטגרנד: מתקיים

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \cos x.$$

ידוע שמתקיים

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$$

(אפשר לבדוק בגזירה, או להכפיל ולחלק ב־$\frac{1}{\cos x} + \tan x$).

לכן

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| - \sin x + C.$$

תשובה: $\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| - \sin x + C$

שאלה 6א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שזה אפשרי בעזרת דוגמה. ניקח $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. שתיהן שואפות ל־0.

מתקיים

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

תשובה: אפשרי, למשל $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

שאלה 6ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שזה אפשרי בעזרת דוגמה. ניקח $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. שתיהן שואפות ל־0.

מתקיים

$$\frac{a_n}{b_n} = -n \to -\infty.$$

תשובה: אפשרי, למשל $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

שאלה 6ג פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שזה אפשרי בעזרת דוגמה. ניקח $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$. שתיהן שואפות ל־0 (כי $|a_n| = \frac{1}{n}$).

המנה היא

$$\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n,$$

שיש לה שני גבולות חלקיים 1 ו־-1, ולכן אין לה גבול (גם לא במובן הרחב).

תשובה: אפשרי, למשל $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

שאלה 7 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ב.

זהו מקרה של 1^{∞}, ולכן נעבור לצורה מעריכית. מתקיים $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, ולכן הביטוי הוא

$$(\cos x)^{1/x^2}=e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}.$$

נחשב את גבול המעריך:

$$\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\to 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right).$$

לכן, מאחר שפונקציית האקספוננט רציפה ב־$\mathbb{R}$, הגבול הוא $e^{-1/2}$.

תשובה: תשובה ב: $e^{-1/2}$.

שאלה 8 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

התשובה הנכונה: ג.

נבדוק את סימן הפונקציה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים $e^{2x}\cos x\geq 0$, ולכן השטח הוא

$$\int_0^{\pi/2}e^{2x}\cos x\,dx.$$

בשתי אינטגרציות בחלקים (אינטגרל "חוזר"):

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{e^{2x}(2\cos x+\sin x)}{5}+C.$$

הפונקציה רציפה בקטע כמכפלה של פונקציות רציפות, ולכן לפי ניוטון־לייבניץ נציב גבולות:

$$\frac{e^{\pi}(0+1)}{5}-\frac{1\cdot(2+0)}{5}=\frac{e^{\pi}-2}{5}.$$

תשובה: תשובה ג: $\frac{e^{\pi}-2}{5}$.

תשע"ח · סמסטר ב׳ · מועד ג׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 116

שאלה 1א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

המונה והמכנה שואפים ל־0, כלומר זהו מקרה של $\frac{0}{0}$, ולכן נשתמש בכלל לופיטל.

שני האינטגרנדים רציפים ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה והפרש של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (e^{t^2}-1)dt = e^{x^2}-1$$

וכן

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t\,dt = 2x\sin(x^2).$$

לפי לופיטל הגבול שווה

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}-1}{2x\sin(x^2)}.$$

נפרק:

$$\frac{e^{x^2}-1}{2x\sin(x^2)} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin(x^2)}\cdot\frac{1}{2x},$$

ושני הגורמים הראשונים שואפים ל־1, בעוד $\frac{1}{2x}\to+\infty$.

לכן הגבול $+\infty$. (בטיילור: המונה $\approx \frac{x^3}{3}$ והמכנה $\approx \frac{x^4}{2}$ $(=1-\cos(x^2)$.)

תשובה: $+\infty$

שאלה 1א2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוח טיילור של הסינוס. נסמן $u=\sin x\to 0$ (מרציפות הסינוס ב־$\mathbb{R}$). לפי טיילור

$$\sin u - u = -\frac{u^3}{6}+o(u^3).$$

לכן

$$\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3} = \frac{-\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)}{x^3} = -\frac{1}{6}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3+o(1).$$

מאחר ש־$\frac{\sin x}{x}\to 1$, הגבול הוא $-\frac{1}{6}$.

תשובה: $-\frac{1}{6}$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפולינום מקלורן עם שארית לגרנז'. נגדיר $f(x)=(1+x)^{3/2}$: $f'(x)=\frac{3}{2}(1+x)^{1/2}$, $f''(x)=\frac{3}{4}(1+x)^{-1/2}$.

פולינום מקלורן מסדר 1: $P_1(x)=1+\frac{3}{2}x$, ולכן $P_1(0.04)=1.06$.

שארית לגרנז':

$$R_1(0.04)=\frac{f''(c)}{2}(0.04)^2$$

עבור $c\in(0,0.04)$, ו־$0<f''(c)<\frac{3}{4}$. לכן

$$0<R_1<\frac{3}{8}\cdot 0.0016=0.0006<0.01.$$

לכן $(1.04)^{1.5}\approx 1.06$ בדיוק הנדרש.

תשובה: ≈ 1.06

שאלה 2א

פתרון רשמי

נגדיר $f(x)=x\sqrt{x}-e^{-x}$, רציפה ב־$[0,\infty)$ וגזירה ב־$(0,\infty)$.

קיום: $f(0)=-1<0$, $f(1)=1-\frac{1}{e}>0$, ולפי ערך הביניים קיים $x_0\in(0,1)$ עם $f(x_0)=0$.

יחידות: אם היה פתרון נוסף $x_1\neq x_0$, לפי רול הייתה נקודה c ביניהם עם $f'(c)=0$.

אבל $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+e^{-x}>0$ לכל $x\geq 0$ — סתירה. לכן הפתרון יחיד.

תשובה: קיים פתרון יחיד (בקטע $(0,1)$).

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

בקטע $(0,\frac{\pi}{2}]$ האינטגרנד חיובי ורציף כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס בקטע; הבעיה היחידה האפשרית היא ב־$x=0$.

נשווה ל־$\frac{1}{x^{m+1}}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1/(x^m\sin x)}{1/x^{m+1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1.$$

לפי מבחן ההשוואה הגבולי, האינטגרל מתכנס אם ורק אם $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^{m+1}}$ מתכנס, כלומר אם ורק אם $m+1<1$.

לכן מתכנס עבור $m<0$ ומתבדר עבור $m\geq 0$.

תשובה: מתכנס $\iff m<0$; מתבדר עבור $m\geq 0$.

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את ערך הפונקציה ואת הגבולות החד־צדדיים ב־0, בהצבה, כי שני הביטויים רציפים ב־$\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות רציפות:

$f(0) = 2A + 3 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, ו־$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 + B$.

לכן f רציפה ב־0 $\iff B = 2A + 2$, ואינה רציפה $\iff 2A + 3 = 1 + B \iff B \neq 2A + 2$.

גזירות מחייבת רציפות, לכן נניח $B = 2A + 2$. נגזרת משמאל: $f'_-(0) = (3x^2 + B)|_{x=0} = B$.

נגזרת מימין:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h + Ah + B - (2A+3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{\cos h - 1}{h} + A \right) = A$$

(כי $B - 2A - 3 = -1$).

גזירה $\iff A = B$ וגם $B = 2A + 2$, כלומר $A = B = -2$.

תשובה: 1) $B \neq 2A + 2$; 2) $B = 2A + 2$; 3) $A = B = -2$.

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט לגראנז'. הפונקציה $\ln x$ רציפה ב־$[b, a]$ וגזירה ב־(b, a) (כי $b > 0$).

לפי משפט לגראנז' קיים $c \in (b, a)$ כך שמתקיים

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c},$$

כלומר $\ln \frac{a}{b} = \frac{a-b}{c}$.

מכיוון ש־$0 < b < c < a$ ו־$a - b > 0$:

$$\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{c} < \frac{a-b}{b},$$

וזה אי־השוויון המבוקש.

תשובה: לגראנז' על $\ln x$ בקטע $[b, a]$.

שאלה 4

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

תחום: נתחיל בתחום ההגדרה $x > 0$; f רציפה בו כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות, ו־$f \geq 0$. מתקיים $\lim_{x\to 0^+} x^2 |\ln x| = 0$, לכן אין אסימפטוטה אנכית. כמו כן $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ ו־$\frac{f(x)}{x} \to \infty$, לכן אין אסימפטוטה אופקית או משופעת.

נגזרת: עבור $0 < x < 1$, $f = -x^2 \ln x$, $f' = -x(2\ln x + 1)$; עבור $x > 1$, $f = x^2 \ln x$, $f' = x(2\ln x + 1) > 0$. בנקודה $x = 1$: $f'_-(1) = -1$, $f'_+(1) = 1$ — נקודת שפיץ, f אינה גזירה שם.

מונוטוניות וקיצון: עולה ב־$(0, e^{-1/2})$, יורדת ב־$(e^{-1/2}, 1)$, עולה ב־$(1, \infty)$. מקסימום מקומי ב־$x = e^{-1/2}$, $f = \frac{1}{2e}$; מינימום מקומי וגלובלי ב־$x = 1$, $f(1) = 0$. אין מקסימום גלובלי.

(לא בסילבוס הנוכחי) **נגזרת שנייה:** עבור $0 < x < 1$, $f'' = -2\ln x - 3$: חיובית (קמורה, $\cup$) ב־$(0, e^{-3/2})$, שלילית (קעורה, $\cap$) ב־$(e^{-3/2}, 1)$. עבור $x > 1$, $f'' = 2\ln x + 3 > 0$ — קמורה.

(לא בסילבוס הנוכחי) **פיתול:** נקודת הפיתול היא $x = e^{-3/2}$, $f = \frac{3}{2e^3}$. בנקודה $x = 1$ הקמירות משתנה אך זו נקודת שפיץ (אין משיק), ולכן אינה נחשבת נקודת פיתול.

סקיצה: הגרף יוצא מ־$(0, 0)$ (לא כולל), עולה עד $\left(e^{-1/2}, \frac{1}{2e}\right)$, יורד ל־$(1, 0)$ בשפיץ, ואז עולה לאינסוף בקמירות.

תשובה: מקס׳ מקומי $\left(e^{-1/2}, \frac{1}{2e}\right)$, מינ׳ גלובלי $(1, 0)$ (שפיץ), פיתול ב־$x = e^{-3/2}$, ללא אסימפטוטות.

תשע"ח · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 118

שאלה 1א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשים לב ש־$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, והגבול מהצורה 1^∞, ולכן נעבור לאקספוננט:

$$(\cos x)^{1/x^2}=e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}.$$

במעריך זהו מקרה של $\frac{0}{0}$, והמונה $\ln\cos x$ רציף בסביבת 0 כהרכבה של פונקציות רציפות.

לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

לכן, מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, הגבול הוא $e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

תשובה: $e^{-1/2}$

שאלה 1א2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי מקלורן:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

וכן

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

המכפלה:

$$\cos x\sqrt{1+x^2}=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)x^4+o(x^4)=1-\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

לכן

$$\frac{1-\cos x\sqrt{1+x^2}}{x^4}=\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4}\to\frac{1}{3}.$$

תשובה: $\frac{1}{3}$

שאלה 1א3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק:

$$\frac{x^2\sin(1/x)}{x}+\frac{2\sin x}{x}=x\sin\frac{1}{x}+2\cdot\frac{\sin x}{x}.$$

מתקיים $|x\sin\frac{1}{x}|\le|x|\to 0$ (חסומה כפול אפסה), ו־$\frac{\sin x}{x}\to 1$.

לכן הגבול $2+0=2$. (שימו לב: לופיטל לא ישים כאן ישירות, כי לנגזרת המונה אין גבול.)

תשובה: 2

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בנוסחת נפח של גוף סיבוב. התחום הוא $0 \le y \le \tan x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

הנפח הוא

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx.$$

נחשב בעזרת פונקציה קדומה:

$$= \pi [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

תשובה: $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נספור את האפסים של פונקציה מתאימה. נגדיר $g(x) = \arctan x - ax$; g אי־זוגית ו־$g(0) = 0$, לכן $x = 0$ תמיד פתרון ופתרונות שליליים מתאימים לחיוביים. הנגזרת היא

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - a.$$

1. עבור $0 < a < 1$: $g'(x) = 0 \iff x = \pm x_0$, $x_0 = \sqrt{\frac{1}{a} - 1} > 0$. מתקיים $g' > 0$ ב־$(0, x_0)$ ו־$g' < 0$ ב־(x_0, ∞). לכן g עולה ממש ב־$[0, x_0]$, ובפרט $g > 0$ ב־$(0, x_0]$.

בקטע $[x_0, \infty)$ הפונקציה g יורדת ממש, $g(x_0) > 0$ ו־$\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$ (כי $\arctan x < \frac{\pi}{2}$). הפונקציה g רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהפרש של פונקציות רציפות, ולכן לפי ערך הביניים והמונוטוניות יש בדיוק שורש אחד ב־(x_0, ∞). מהאי־זוגיות יש בדיוק אחד שלילי, ועם $x = 0$ — בדיוק 3 פתרונות.

2. עבור $a \le 0$: לכל $x > 0$, $\arctan x > 0 \ge ax$, ולכן $g(x) > 0$; מהאי־זוגיות $g(x) < 0$ לכל $x < 0$. פתרון יחיד $x = 0$.

עבור $a \ge 1$: $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - a < 0$ לכל $x \neq 0$, ולכן g יורדת ממש ו־$x = 0$ הוא הפתרון היחיד.

תשובה: $0 < a < 1$: שלושה פתרונות; $a \le 0$ או $a \ge 1$: פתרון יחיד $x = 0$.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

האינטגרנד רציף ב־$[0, 1)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס שם, ולכן האינטגרל לא אמיתי רק בנקודה $x = 1$.

נציב $u = 1 - x$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{3/4}} = \int_0^1 u^{-3/4} \, du.$$

נחשב

$$\int_\varepsilon^1 u^{-3/4} \, du = \left[4u^{1/4} \right]_\varepsilon^1 = 4 - 4\varepsilon^{1/4} \to 4$$

כאשר $\varepsilon \to 0^+$.

לכן האינטגרל מתכנס (חזקה $\frac{3}{4} < 1$) וערכו 4.

תשובה: מתכנס, ערכו 4.

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק רציפות מימין ומשמאל לנקודה. גבול מימין:

$$\ln f(x) = \frac{c}{x}\ln\frac{1-x}{1+x} = c\cdot\frac{\ln(1-x)-\ln(1+x)}{x} \to c(-1-1) = -2c.$$

לכן, מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-2c}$, ורציפות מימין דורשת $-2c = 2$, כלומר $c = -1$.

גבול משמאל:

$$\ln f(x) = \frac{b\ln(x+a)}{x}.$$

אם $a \neq 1$ אז $\ln(x+a) \to \ln a \neq 0$ (מרציפות $\ln$ ב־$(0,\infty)$): עבור $b \neq 0$ הביטוי שואף ל־$\pm\infty$ (הגבול 0 או ∞), ועבור $b = 0$ הגבול 1. בשני המקרים אינו e^2.

לכן $a = 1$, ואז $\frac{b\ln(1+x)}{x} \to b$, כלומר, שוב מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^b$. רציפות משמאל דורשת $b = 2$.

מסקנה: f רציפה ב־0 בדיוק עבור $a = 1,\ b = 2,\ c = -1$.

תשובה: $a = 1,\ b = 2,\ c = -1$

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בנוסחת אורך עקומה. הנגזרת היא $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ולכן

$$1 + f'(x)^2 = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2.$$

נקבל

$$L = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

תשובה: $\frac{e-e^{-1}}{2} = \sinh 1$

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

תחום: נתחיל בתחום ההגדרה, שבו נדרש $x^2>3$, כלומר $x<-\sqrt{3}$ או $x>\sqrt{3}$. מתקיים $\lim_{x\to\pm\sqrt{3}} f(x)=-\infty$ (מהצד שבתחום), לכן $x=\pm\sqrt{3}$ אסימפטוטות אנכיות. כמו כן $\lim_{x\to\infty} f=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f=-\infty$ (כי $\frac{\ln(x^2-3)}{x}\to 0$). אין אסימפטוטה משופעת: $\frac{f(x)}{x}\to 1$ אך $f(x)-x=\ln(x^2-3)\to\infty$.

נגזרת: הנגזרת היא

$$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2-3}=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-3}.$$

בתחום רק $x=-3$ מאפסת. מתקיים $f'>0$ ב־$(-\infty,-3)$ וב־$(\sqrt{3},\infty)$; $f'<0$ ב־$(-3,-\sqrt{3})$. מקסימום מקומי ב־$x=-3$: $f(-3)=\ln 6-3\approx -1.21$.

(לא בסילבוס הנוכחי) **נגזרת שנייה:** מתקיים

$$f''(x)=\frac{2(x^2-3)-4x^2}{(x^2-3)^2}=-\frac{2(x^2+3)}{(x^2-3)^2}<0$$

בכל התחום: הפונקציה קעורה ($\cap$) בשני הענפים, ואין נקודות פיתול.

סקיצה: הפונקציה רציפה בכל ענף כסכום והרכבה של פונקציות רציפות, ולכן מקבלת את כל הערכים שבין ערכיה. ענף שמאלי עולה מ־$-\infty$ עד $3-\ln 6$ ב־$x=-3$ ויורד ל־$-\infty$ ליד $-\sqrt{3}$; ענף ימני עולה מ־$-\infty$ (ליד $\sqrt{3}$) ל־∞ ומקבל כל ערך ממשי פעם אחת בדיוק.

ב. הענף הימני תורם פתרון אחד לכל m. הענף השמאלי תורם 2 פתרונות עבור $m<\ln 6-3$, פתרון אחד עבור $m=\ln 6-3$, ואף פתרון עבור $m>\ln 6-3$.

לכן: פתרון אחד $\iff m>\ln 6-3$; שני פתרונות $\iff m=\ln 6-3$ (עבור $m<\ln 6-3$ יש שלושה).

תשובה: מקסימום מקומי $(-3,\ln 6-3)$, קעורה בכל התחום, אסימפטוטות $x=\pm\sqrt{3}$. פתרון אחד: $m>\ln 6-3$; שניים: $m=\ln 6-3$.

תשע״ח · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 120

שאלה 1א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נעביר את הביטוי לגבולות מוכרים. עבור $x>0$ מתקיים

$$\frac{\pi}{2}-\arctan x=\arctan\frac{1}{x},$$

ונסמן $u=\arctan\frac{1}{x}\to 0^+$ (מרציפות $\arctan$ ב־$\mathbb{R}$).

נקבל

$$x\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{\arctan(1/x)}{1/x}.$$

שני הגורמים שואפים ל־1 ($\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$, $\lim_{s\to 0}\frac{\arctan s}{s}=1$), ולכן הגבול 1.

תשובה: 1

שאלה 1א2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מצב של 1^{∞}, ולכן נעבור לאקספוננט. נציב $t = \frac{1}{x} \to 0^+$: הגבול הוא

$$\lim_{t\to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}.$$

במעריך זהו מקרה של $\frac{0}{0}$, והמונה והמכנה רציפים בסביבת 0 כהרכבה וסכום של פונקציות רציפות.

לפי לופיטל:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}=1,$$

כשהגבול האחרון מתקבל בהצבה כי המנה רציפה ב־0 (המכנה אינו מתאפס שם).

לכן, מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, הגבול הוא e.

תשובה: e

שאלה 1א3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נעביר את הביטוי למנה: נציב $t = \frac{1}{x} \to 0^+$ ונקבל

$$x - x^2\ln(1+\tfrac{1}{x}) = \frac{t-\ln(1+t)}{t^2}.$$

זהו מקרה של $\frac{0}{0}$, והמונה והמכנה רציפים בסביבת 0 כהפרש, הרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות.

לפי לופיטל:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2},$$

כשהגבול האחרון מתקבל בהצבה כי המנה רציפה ב־0 (המכנה אינו מתאפס שם).

(לחלופין, $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$.)

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 1ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בנוסחת אורך עקומה בהצגה פרמטרית. הנגזרות הן $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$.

לכן

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=3|a|\,|\sin t\cos t|\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=\frac{3|a|}{2}|\sin 2t|.$$

נקבל

$$L=\int_0^{2\pi}\frac{3|a|}{2}|\sin 2t|\,dt=4\int_0^{\pi/2}\frac{3|a|}{2}\sin 2t\,dt=4\cdot\frac{3|a|}{2}\cdot 1=6|a|.$$

תשובה: $6|a|$ (עבור $a>0$: $6a$).

שאלה 2א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נרחיב את f לפונקציה רציפה בקטע סגור ונשתמש במשפט ויירשטראס. נגדיר $F(x)=f(x)$ עבור $x\in(a,b)$, $F(a)=A$, $F(b)=B$.

הפונקציה F רציפה ב־(a,b) כי f רציפה שם, רציפה מימין ב־a ומשמאל ב־b מהנתון על הגבולות. לכן F רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

לפי משפט ויירשטראס F חסומה ב־$[a,b]$: קיים M כך ש־$|F(x)|\le M$.

בפרט $|f(x)|=|F(x)|\le M$ לכל $x\in(a,b)$, כלומר f חסומה.

תשובה: הרחבה רציפה לקטע הסגור ושימוש במשפט ויירשטראס.

תשע"ח · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 121

שאלה 1 פתרון רשמי

נסמן ב־x את צלע הבסיס וב־h את הגובה (במטרים). מהנפח: $x^2h=27$, כלומר $h=\frac{27}{x^2}$.

עלות הבסיס $6x^2$, ועלות ארבע הדפנות $4\cdot 3\cdot xh=\frac{12\cdot 27}{x}$. לכן העלות היא $f(x)=6x^2+\frac{324}{x}$, $x>0$.

$f'(x)=12x-\frac{324}{x^2}=12\left(x-\frac{27}{x^2}\right)$, ו־$f'(x)=0 \iff x=3 \iff x^3=27$.

$f'(x)<0$ עבור $0<x<3$ ו־$f'(x)>0$ עבור $x>3$ (וגם $f''(3)>0$), לכן $x=3$ היא נקודת מינימום גלובלית בתחום $x>0$.

תשובה: צלע הבסיס 3 מטר.

שאלה 2 פתרון רשמי

תחום ההגדרה: $x\neq 0$. הפונקציה זוגית, $f(-x)=f(x)$, לכן מספיק לבדוק $x>0$.

$f'(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$, ו־$f'(x)=0 \iff x^6=1 \iff x=\pm 1$.

בדיקת סימני הנגזרת מראה ש־$x=\pm 1$ נקודות מינימום גלובלי: $f(x)\ge f(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

כמו כן $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, לכן לכל $y>\frac{3}{4}$ קיים $b>1$ עם $f(b)>y$, ולפי משפט ערך הביניים (f רציפה ב־$[1,b]$) קיים $x\in[1,b]$ עם $f(x)=y$.

לכן התמונה היא $\left[\frac{3}{4},\infty\right)$.

תשובה: $\left[\frac{3}{4},\infty\right)$

שאלה 3 פתרון רשמי

נקודות החיתוך: $x=0$ או $x^2=\sqrt{x} \iff x=1$, ובקטע $[0,1]$ מתקיים $g(x)\ge f(x)$.

א. $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

ב. $V=\pi\int_0^1\left(g(x)^2-f(x)^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$.

תשובה: א. $\frac{1}{3}$; ב. $\frac{3\pi}{10}$.

שאלה 4 פתרון רשמי

לפי פולינום טיילור עם שארית פיאנו סביב 0: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, כלומר $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)}{x^2} = 0$.

נציב $x = \frac{1}{n} \to 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1/n) - 1 + \frac{1}{2}(1/n)^2}{(1/n)^2} = 0$, כלומר $\lim_{n\to\infty} \left[n^2\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{2}\right] = 0$.

לכן $\lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 25ב פתרון רשמי

מכיוון ש־$-1 \le \sin t \le 1$ לכל t, מתקיים $-1 \le f(x) \le 1$ לכל $x \neq 0$.

בפרט $f(0) = 2 > 1 \ge f(x)$ לכל $x \neq 0$, ולכן $x = 0$ היא נקודת מקסימום גלובלי.

בנקודות $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ מתקיים $f(x_k) = 1$, והן נקודות מקסימום מקומי (ערך 1 הוא הגדול ביותר בסביבתן שאינה כוללת את 0).

בנקודות $z_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ מתקיים $f(z_k) = -1$, והן נקודות מינימום גלובלי.

תשובה: $x = 0$: מקסימום גלובלי; $x_k = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi k}$: מקסימום מקומי; $z_k = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi k}$: מינימום גלובלי.

תשע״ח · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **122**

שאלה 1 פתרון רשמי

דרגת המונה אינה קטנה מדרגת המכנה, לכן נחלק פולינומים: $\frac{x^3+2x^2-8x-9}{x^2-9} = x + 2 + \frac{x+9}{x^2-9}$.

$\int (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x$.

פירוק לשברים חלקיים, עם $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$: $\frac{x+9}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$. השוואת מקדמים: $A + B = 1,\ 3A - 3B = 9$, ולכן $A = 2,\ B = -1$.

$\int \frac{x+9}{x^2-9}\,dx = 2\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$.

סה״כ: $\int \frac{x^3+2x^2-8x-9}{x^2-9}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$.

תשובה: $\frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

שאלה 2 פתרון רשמי

נגדיר $f(x) = \sqrt{x}$. אז $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$.

פולינום טיילור מסדר 1 סביב $a = 9$: $P_1(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9)$, ובפרט $P_1(10) = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$.

לפי צורת לגרנז' של השארית, קיים $c \in (9, 10)$ כך ש־$R_1(10) = \frac{f''(c)}{2!}(10-9)^2 = \frac{f''(c)}{2}$. $\sqrt{10} - \frac{19}{6} = R_1(10) = \frac{f''(c)}{2!}(10-9)^2 = \frac{f''(c)}{2}$.

$\frac{1}{4\cdot 27} = \frac{1}{4\cdot 9^{3/2}} < \frac{1}{4c^{3/2}} = |f''(c)|$, ולכן $\left|\sqrt{10} - \frac{19}{6}\right| < \frac{1}{2\cdot 4\cdot 27} = \frac{1}{216} < \frac{1}{100}$.

הערה: אפשר לפתור גם בדרכים אחרות, למשל שיטת החציה או ניוטון־רפסון.

הערה: בפתרון הרשמי מופיעה טעות הקלדה ($f''(16)$; החסם הסופי $f''(10)$) נכון $\frac{1}{216}$.

תשובה: למשל $\frac{19}{6}$.

שאלה 3 פתרון רשמי

האינטגרל בעייתי בשני הקצוות ($\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \to +\infty$ כאשר $x \to 0^+$), לכן נפצל: $\int_0^1 + \int_1^\infty$.

בהצבה $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$: $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^{-t}\,dt = -2e^{-\sqrt{x}} + C$.

$\int_0^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(-2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{a}}\right) = 2 - \frac{2}{e}$.

$\int_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\left(-2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-1}\right) = \frac{2}{e}$.

שני החלקים מתכנסים, ולכן האינטגרל מתכנס וערכו $2 = \frac{2}{e} + \left(2 - \frac{2}{e}\right)$.

הערה: בפתרון הרשמי נכתבו ערכי הביניים $2(1-e)$ ו־$2e$ במקום $\frac{2}{e} - 2$ ו־$\frac{2}{e}$ (טעות בסימן המעריך); התשובה הסופית 2 נכונה.

תשובה: מתכנס, ערכו 2.

שאלה 4 פתרון רשמי

אורך הגרף הוא $\int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$, כאשר $f'(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{1}{x^3}$.

$1 + f'(x)^2 = \frac{x^6}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^6} + 1 = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right)^2$, ולכן $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \left|\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right|$.

בקטע $[-2,-1]$ מתקיים $x^3 < 0$, ולכן $\left|\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right| = -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right)$.

$\int_{-2}^{-1} -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \left[\frac{1}{2x^2} - \frac{x^4}{16}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{21}{16}$.

תשובה: $\frac{21}{16}$

שאלה 25ב פתרון רשמי

הפונקציה $f(x) = \ln x$ רציפה ב־$[n, n+1]$ וגזירה ב־$(n, n+1)$, עם $f'(x) = \frac{1}{x}$.

לפי משפט לגראנז' קיימת $c \in (n, n+1)$ כך ש־$\ln(n+1) - \ln n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1) - n} = \frac{1}{c}$.

מכיוון ש־$\frac{1}{x}$ יורדת ו־$n < c < n+1$, מתקיים $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, ומכאן אי־השוויון (ואף באי־שוויון חזק).

הוכחה חלופית: $g(x) = \ln x - (x-1)$ מקבלת מקסימום מוחלט 0 ב־$x = 1$, ולכן $\ln x \le x - 1$. הצבת $x = \frac{n+1}{n}$ נותנת את החסם העליון, והצבת $x = \frac{n}{n+1}$ נותנת $-\ln(n+1) - \ln n) \le -\frac{1}{n+1}$, כלומר החסם התחתון.

תשובה: הוכחה באמצעות לגראנז' על $\ln x$ בקטע $[n, n+1]$.

תשע"ז · סמסטר ב' · מועד ג'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 123

שאלה 1א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבצע אינטגרציה בחלקים פעמיים עם $dv = e^{-2x}dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

נקבל

$$\int x^2 e^{-2x}dx = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx,$$

וכן

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

לכן $\int \frac{x^2}{e^{2x}}dx = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$.

תשובה: $-e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$

שאלה 1א2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = \operatorname{arctan}\frac{1}{x}$, $dv = x\,dx$; אז

$$du = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{dx}{1+x^2},$$

וכן $v = \frac{x^2}{2}$.

נקבל

$$\int x\arctan\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

נחשב

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \arctan x.$$

לכן התוצאה

$$\frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{x - \arctan x}{2} + C.$$

תשובה: $\frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

כדי שהפונקציה תהיה רציפה ב־0, שני הגבולות החד־צדדיים צריכים להיות שווים ל־b. נחשב את הגבול מימין:

$$e^x + e^{-x} - 2 = x^2 + \frac{x^4}{12} + \dots,$$

ולכן הגבול 1 (או לופיטל פעמיים: $\lim \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1$).

נחשב את הגבול משמאל:

$$\frac{x\sin(ax)}{1-\cos x} = \frac{\sin(ax)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x} \to a\cdot 2 = 2a$$

(עבור $a=0$ הביטוי זהותית 0, בהתאם לנוסחה).

תנאי הרציפות הוא $2a = 1 = b$, כלומר $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$.

תשובה: $a = \frac{1}{2},\ b = 1$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

גזירות גוררת רציפות:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} = 1,$$

ולכן $f(1) = a + b = 1$.

נגזרת ימנית:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim\frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2}.$$

עם $t = x-1$:

$$\ln(1+t) - t = -\frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

ולכן הגבול $-\frac{1}{2}$.

נגזרת שמאלית: $(ax^2+b)' = 2ax$, ובנקודה 1: $2a$. לכן $2a = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{5}{4}$, ו־$f'(1) = -\frac{1}{2}$.

תשובה: $a = -\frac{1}{4},\ b = \frac{5}{4},\ f'(1) = -\frac{1}{2}$

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח בעזרת מונוטוניות. נגדיר

$$g(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$$

עבור $x \geq 1$, ומתקיים $g(1) = 0$.

הנגזרת היא

$$g'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 2 = \ln x + \frac{1}{x} - 1,$$

ו־$g'(1) = 0$. הנגזרת השנייה היא

$$g''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$$

עבור $x > 1$.

הפונקציות g ו־g' רציפות ב־$[1,\infty)$ כסכום ומכפלה של פונקציות רציפות, ולכן אפשר להסיק מונוטוניות בקטע הכולל את $x=1$.

לכן g' עולה ממש ב־$[1,\infty)$ ו־$g'(x) > g'(1) = 0$ עבור $x > 1$; לכן g עולה ממש ו־$g(x) > g(1) = 0$, וזה האי־שוויון.

תשובה: הוכח באמצעות מונוטוניות.

שאלה 2ג פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בקירוב ליניארי סביב $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\sin(x_0 + h) \approx \sin x_0 + h\cos x_0.$$

נקבל

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 0.01\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7142.$$

תשובה: $1.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7142$

שאלה 3א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור עד סדר 4:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

וכן

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

נכפול את הפיתוחים:

$$\cos x\sqrt{1+x^2} = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

לכן המונה $\frac{x^4}{3} + o(x^4)$ והגבול $\frac{1}{3}$.

תשובה: $\frac{1}{3}$

שאלה 2א3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נסמן

$$h(x) = x^{x+1}(\ln x + 1) - x.$$

הפונקציה h רציפה ב־$(0, \infty)$ כסכום ומכפלה של פונקציות רציפות, ומתקיים $h(1) = 0$, כך שזו צורה $\frac{0}{0}$ והגבול שווה $\frac{h'(1)}{-1}$ (לופיטל).

נחשב

$$\left(x^{x+1}\right)' = \left(e^{(x+1)\ln x}\right)' = x^{x+1}\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right),$$

ובנקודה 1 שווה 2.

נקבל

$$h'(x) = \left(x^{x+1}\right)'(\ln x + 1) + x^{x+1} \cdot \frac{1}{x} - 1,$$

ולכן $h'(1) = 2 \cdot 1 + 1 - 1 = 2$.

הגבול:

$$\frac{2}{-1} = -2.$$

תשובה: -2

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק התכנסות בעזרת מבחן ההשוואה. האינטגרנד רציף ב־$[1, \infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה חיובי, והוא מקיים

$$0 < \frac{e^{\sin x}}{x^2} \leq \frac{e}{x^2}.$$

האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{e}{x^2}\,dx = e$$

מתכנס, ולפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתכנס.

תשובה: מתכנס.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. נחקור את הפונקציה ונכתוב $f(x)=e^{x\ln x}>0$, תחום $(0,\infty)$. מתקיים $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$, ולכן, מרציפות האקספוננט ב־$\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f=1$ (אין אסימפטוטה אנכית). כמו כן $\lim_{x\to\infty} f=\infty$ ו־$\frac{f(x)}{x}=x^{x-1}\to\infty$, כך שאין אסימפטוטות.

הנגזרת

$$f'(x)=x^x(\ln x+1)$$

שלילית ב־$(0,\frac{1}{e})$ וחיובית ב־$(\frac{1}{e},\infty)$. מינימום מוחלט $f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-1/e}\approx 0.69$. בנוסף $f'(x)\to-\infty$ כאשר $x\to 0^+$.

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה מקיימת

$$f''(x)=x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)>0,$$

ולכן הפונקציה קמורה בכל התחום, ללא נקודות פיתול.

מתקיים $f(1)=1$. הטווח: $[e^{-1/e},\infty)$.

ב. מתקיים $f=|f|$, ו־f רציפה ב־$(0,\infty)$ כהרכבה של פונקציות רציפות. בקטע $(0,\frac{1}{e}]$ הפונקציה f יורדת מ־1 (לא כולל) ל־$e^{-1/e}$, ובקטע $[\frac{1}{e},\infty)$ עולה מ־$e^{-1/e}$ ל־∞.

לכן: אין פתרון עבור $m<e^{-1/e}$; פתרון אחד עבור $m=e^{-1/e}$ או $m\geq 1$; שני פתרונות עבור $e^{-1/e}<m<1$.

תשובה: מינימום מוחלט $\left(\frac{1}{e},e^{-1/e}\right)$, קמורה, $f\to 1$ כאשר $x\to 0^+$; ב: פתרון אחד: $m=e^{-1/e}$ או $m\geq 1$; שניים: $e^{-1/e}<m<1$; אין: $m<e^{-1/e}$.

תשע"ז · סמסטר ב' · מועד ב'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **125**

שאלה 1א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבצע אינטגרציה בחלקים: $u=\ln\cos x$, $dv=\frac{dx}{\cos^2 x}$, כלומר $du=-\tan x\,dx$, $v=\tan x$.

נקבל

$$\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx=\tan x\ln\cos x+\int\tan^2 x\,dx.$$

נחשב

$$\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x.$$

לכן התוצאה

$$\tan x\ln(\cos x)+\tan x-x+C.$$

תשובה: $\tan x\ln(\cos x)+\tan x-x+C$

שאלה 2א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפרק את האינטגרנד:

$$e^{2x+e^x} = e^x \cdot e^{e^x} \cdot e^x.$$

נציב $u = e^x$, $du = e^x dx$: $\int ue^u \, du$.

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int ue^u du = ue^u - e^u = (u-1)e^u.$$

לכן

$$(e^x - 1)e^{e^x} + C.$$

תשובה: $(e^x - 1)e^{e^x} + C$

שאלה 2ב1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

וכן

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

המונה:

$$(1-a-b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3}\right)x^3 + \left(-\frac{a}{120} - \frac{2b}{15}\right)x^5 + o(x^5).$$

כדי שהגבול יהיה סופי ושונה מאפס, מקדמי x ו־x^3 מתאפסים: $a+b=1$, $a+4b=0$. לכן $b=-\frac{1}{3}$, $a=\frac{4}{3}$.

הגבול הוא מקדם x^5:

$$-\frac{4/3}{120} + \frac{2}{45} = -\frac{1}{90} + \frac{4}{90} = \frac{1}{30}.$$

תשובה: $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, הגבול $\frac{1}{30}$.

שאלה 2א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב לפי הגדרת הנגזרת:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\ln|x|}.$$

כאשר $x \to 0$: $x \to 0$ ו־$1+\ln|x| \to -\infty$, ולכן המנה שואפת ל־0.

לכן $f'(0) = 0$.

תשובה: $f'(0) = 0$

שאלה 2א2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב תחילה את הנגזרת הראשונה. עבור $x \neq 0$:

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

בנקודה 0 נחשב לפי ההגדרה:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$$

(כי $\sin x - x = O(x^3)$).

באופן דומה

$$g''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}.$$

לפי טיילור:

$$x\cos x - \sin x = x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

לכן $g''(0) = -\frac{1}{3}$.

תשובה: $g''(0) = -\frac{1}{3}$

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחסום את f בנפרד בזנב ובקטע סגור. נסמן $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$. לפי הגדרת הגבול עם $\epsilon = 1$ קיים $M > a$ כך שלכל $x > M$: $|f(x) - L| < 1$, ולכן $|f(x)| < |L| + 1$.

הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a, M]$ (כי היא רציפה ב־(a, ∞)), ולפי משפט ויירשטראס היא חסומה שם: $|f(x)| \leq K$.

לכן לכל $x \geq a$: $|f(x)| \leq \max\{K, |L| + 1\}$, ו־$f$ חסומה ב־$[a, \infty)$.

תשובה: הוכח (הגדרת הגבול + ויירשטראס).

שאלה 3א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשים לב שמחוץ ל־0 הפונקציה רציפה וגזירה בתחום הגדרתה (עבור $b \neq 0$) כמנה, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות וגזירות, כך שצריך לבדוק רק את $x = 0$.

משמאל:

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2},$$

ולכן $\frac{\tan x - \sin x}{x^2} \sim \frac{x}{2} \to 0$. מימין: $|x^2 \cos\frac{4}{3x}| \leq x^2 \to 0$ ו־$\frac{x}{b} \to 0$. לכן א1: $a = 0$ ו־$b \neq 0$ כלשהו.

א2 (עם $a = 0$): נגזרת שמאלית

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

נגזרת ימנית

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x\cos\frac{4}{3x} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b}.$$

גזירות דורשת $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, כלומר $b = 2$ ו־$a = 0$.

תשובה: א1: $a = 0$, כל $b \neq 0$; א2: $a = 0,\ b = 2$.

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק התכנסות בעזרת מבחן ההשוואה. האינטגרנד רציף ב־$[1,\infty)$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה חיובי, ולכן הבעיה היחידה היא באינסוף.

לכל $x \geq 1$ מתקיים $\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}\,x$, ולכן האינטגרנד

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x(\ln x + 1)} > 0.$$

נחשב:

$$\int_1^R \frac{dx}{x(\ln x+1)} = \ln(\ln R + 1) \to \infty,$$

כלומר האינטגרל הזה מתבדר.

לפי מבחן ההשוואה האינטגרל המקורי מתבדר.

תשובה: מתבדר.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א. נחקור את הפונקציה. התחום הוא $\mathbb{R}$, והאפסים הם $x = 0, 5$. מתקיים $\lim_{x\to\pm\infty} f = \pm\infty$ ו־$\frac{f(x)}{x} \to \infty$, לכן אין אסימפטוטות. הנגזרת היא

$$f'(x) = x^{2/3} + \frac{2}{3}(x-5)x^{-1/3} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

עבור $x \neq 0$.

מתקיים $f' > 0$ ב־$(-\infty, 0)$ וב־$(2,\infty)$, $f' < 0$ ב־$(0,2)$. מקסימום מקומי $(0,0)$ – נקודת חוד ($f' \to +\infty$ משמאל ו־$-\infty$ מימין); מינימום מקומי $(2, -4.76) \approx (2, -3\sqrt[3]{4})$.

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה היא

$$f''(x) = \frac{10(x+1)}{9x^{4/3}},$$

ולכן הפונקציה קעורה ב־$(-1)-\infty,-)$, קמורה ב־$(-1,0)$ וב־$(0,\infty)$; נקודת פיתול $(-1,-6)$.

ב. הפונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ כמכפלה של פונקציות רציפות, ולכן בקטע הסגור $[-1,2]$ היא מקבלת ערך גדול ביותר וקטן ביותר. נשווה ערכים: $f(-1) = -6$, $f(0) = 0$, $f(2) = -3\sqrt[3]{4} \approx -4.76$. לכן הגדול ביותר 0 והקטן ביותר -6.

ג. הפונקציה $|f|$ רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות, ומתנהגת כך: ב־$(-\infty,0]$ היא יורדת מ־∞ ל־0; ב־$[0,2]$ עולה מ־0 ל־$3\sqrt[3]{4}$; ב־$[2,5]$ יורדת ל־0; ב־$[5,\infty)$ עולה ל־∞.

לכן: $m < 0$ – אין פתרון; $m = 0$ – שני פתרונות $(0,5)$; $0 < m < 3\sqrt[3]{4}$ – ארבעה; $m = 3\sqrt[3]{4}$ – שלושה; $m > 3\sqrt[3]{4}$ – שניים; אף ערך של m אינו נותן פתרון יחיד.

תשובה: מקס' מקומי $(0,0)$ (חוד), מינ' מקומי $(2,-3\sqrt[3]{4})$, פיתול $(-1,-6)$; בקטע $[-1,2]$: מקסימום 0, מינימום -6; ג: אין m עם פתרון אחד, שניים: $m = 0$ או $m > 3\sqrt[3]{4}$, שלושה: $m = 3\sqrt[3]{4}$, ארבעה: $0 < m < 3\sqrt[3]{4}$, אין: $m < 0$.

תשע"ז · סמסטר ב' · מועד א'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 127

שאלה 1א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זו צורה 1^{∞}. נכתוב

$$(\tan x)^{\tan 2x} = e^{\tan 2x \ln(\tan x)}.$$

נרשום

$$\tan 2x \ln \tan x = \frac{\ln \tan x}{\cot 2x},$$

צורה $\frac{0}{0}$: המונה והמכנה רציפים בסביבת $\frac{\pi}{4}$ כהרכבה של פונקציות רציפות ומתאפסים ב־$\frac{\pi}{4}$.

לפי לופיטל:

$$\lim \frac{\frac{1}{\tan x \cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = \lim \frac{\frac{2}{\sin 2x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = \lim(-\sin 2x) = -1.$$

לכן, מרציפות e^x ב־$\mathbb{R}$, הגבול e^{-1}.

תשובה: e^{-1}

שאלה 1א2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחסום כל מחובר ונשתמש בכלל הסנדוויץ'. לכל $1 \le k \le n^2$:

$$\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+\sqrt{k}} \le \frac{n}{n^2},$$

כלומר $\frac{1}{n} \le y_k \le \frac{1}{n+1}$, כאשר $y_k = \frac{n}{n^2+\sqrt{k}}$.

הפונקציה $1-\cos y$ עולה ב־$[0,\pi]$, ולכן כל מחובר בין $1-\cos\frac{1}{n+1}$ ל־$1-\cos\frac{1}{n}$. בסכום n^2 מחוברים:

$$n^2\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right) \le S_n \le n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right).$$

מכיוון ש־$\frac{1-\cos y}{y^2} \to \frac{1}{2}$ כאשר $y \to 0$:

$$n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}$$

וכן

$$n^2\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{n+1}}{(1/(n+1))^2} \to \frac{1}{2}.$$

לפי כלל הסנדוויץ' הגבול $\frac{1}{2}$.

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 1ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב תחילה את $x'(t)$ ו־$y'(t)$. בקטע $[0, \frac{\pi}{4}]$ מתקיים $\tan x \geq x \geq 0$, ולכן השורש מוגדר.

האינטגרנד רציף בקטע זה כהרכבה של פונקציות רציפות, ולכן לפי המשפט היסודי $y'(t) = \sqrt{\tan^2 t - t^2}$, ו־$x'(t) = t$.

מכאן

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{t^2 + \tan^2 t - t^2} = |\tan t| = \tan t.$$

לכן אורך העקום הוא

$$L = \int_0^{\pi/4} \tan t \, dt = [-\ln \cos t]_0^{\pi/4} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}.$$

תשובה: $\frac{\ln 2}{2}$

שאלה 2א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נספור את האפסים של $g(x) = \arctan x - ax$ (פונקציה אי־זוגית, $g(0) = 0$). הנגזרת היא

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - a,$$

כאשר $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ ושוויון ל־1 רק ב־$x = 0$.

עבור $a \geq 1$ מתקיים $g'(x) < 0$ לכל $x \neq 0$, לכן g יורדת ממש ויש פתרון יחיד $x = 0$.

עבור $a \leq 0$: אם $x > 0$ אז $\arctan x > 0 \geq ax$, ואם $x < 0$ אז $\arctan x < 0 \leq ax$. לכן פתרון יחיד $x = 0$.

עבור $0 < a < 1$ מתקיים $g'(x) = 0$ ב־$x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{a} - 1}$. הפונקציה g עולה ב־$(0, x_0)$, ולכן $g(x_0) > g(0) = 0$; אחר כך יורדת ו־$g(x) \to -\infty$ (כי $\arctan$ חסומה).

הפונקציה g רציפה ב־$\mathbb{R}$ כהפרש של פונקציות רציפות, ולכן לפי ערך הביניים ומונוטוניות יש בדיוק שורש אחד ב־(x_0, ∞) ואין שורשים ב־$(0, x_0]$.

מהאי־זוגיות יש גם שורש אחד שלילי. סך הכל 3 פתרונות.

תשובה: $a \geq 1$: פתרון אחד; $a \leq 0$: פתרון אחד; $0 < a < 1$: שלושה פתרונות.

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפצל את האינטגרל ב־1 ונבדוק כל חלק במבחן ההשוואה. בקטע $(0, 1]$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ו־$\int_0^1 x^{-1/2} dx$ מתכנס.

בקטע $[1, \infty)$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} \leq x^{-3/2},$$

ו־$\int_1^\infty x^{-3/2} dx$ מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתכנס.

תשובה: מתכנס.

שאלה 3 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוחי טיילור:

$$\sin x - \frac{x^2}{2} = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5).$$

שני המכנים הם $x + O(x^2)$.

נכתוב את f כשבר אחד:

$$f(x) = \frac{b\ln(1+x) - (\sin x - \frac{x^2}{2})}{(\sin x - \frac{x^2}{2})\ln(1+x)}.$$

המכנה $\sim x^2$ והמונה $(b-1)x + O(x^2)$. אם $b \neq 1$ הביטוי $\frac{b-1}{x} \sim$ ואין גבול סופי, לכן $b = 1$.

עבור $b = 1$: המונה $= \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + O(x^5)$ והמכנה $= x^2 - x^3 + O(x^4)$, ולכן

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \dots}{1 - x + \dots} = \frac{x}{2} + O(x^2) \to 0.$$

לכן הפונקציה רציפה ב־0 בדיוק כאשר $b = 1$, $a = 0$.

סעיף ב: עבור $a = 0, b = 1$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} + O(x) \to \frac{1}{2}.$$

לכן f גזירה ב־0 ו־$f'(0) = \frac{1}{2}$. (עבור ערכים אחרים f אינה רציפה ב־0 ולכן אינה גזירה שם.)

תשובה: $a = 0,\ b = 1$; $f'(0) = \frac{1}{2}$.

שאלה 4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

א1. נמצא את f באינטגרציה:

$$f(x) = Ax + A\sqrt{x^2+2x+2} + C.$$

מהתנאי $f(-1)=0$: $-A + A + C = 0$, כלומר $C = 0$. מהתנאי $f(0) = \sqrt{2}$: $A\sqrt{2} = \sqrt{2}$, כלומר $A = 1$. לכן

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+2x+2}.$$

א2. מתקיים $x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1 > 0$, לכן התחום $\mathbb{R}$. הנגזרת מקיימת

$$f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} > 0$$

כי $\left|\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\right| < 1$; לכן f עולה ממש.

א3. אין אסימפטוטות אנכיות (f רציפה ב־$\mathbb{R}$ כסכום והרכבה של פונקציות רציפות). בכיוון $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} \to 2$,

$$f(x) - 2x = \sqrt{x^2+2x+2} - x = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} \to 1 :$$

$y = 2x+1$. בכיוון $-\infty$:

$$f(x) = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} \to \frac{2}{-2} = -1 :$$

$y = -1$.

ב1. נרשום

$$g(x) = x + |x+1| = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}.$$

ב2. הפונקציה g מורכבת בדיוק משתי האסימפטוטות של f, ו־f עולה, נמצאת מעליהן ומתקרבת אליהן; בנקודה $x = -1$ מתקיים $f(-1) = 0$, $g(-1) = -1$.

ב3. נגדיר

$$h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{(x+1)^2+1} - |x+1|.$$

עבור $u = |x+1| \geq 0$:

$$h = \sqrt{u^2+1} - u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}+u},$$

רציפה (כהפרש של פונקציות רציפות), יורדת ממש מ־1 (ב־$u=0$) ושואפת ל־0. כל ערך $0 < u$ מתאים לשני ערכי x (סימטריים סביב -1).

לכן: פתרון אחד עבור $m = 1$ ($x = -1$); שני פתרונות עבור $0 < m < 1$; אין פתרון עבור $m \leq 0$ או $m > 1$.

תשובה: $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x+2}$, עולה ב־$\mathbb{R}$, אסימפטוטות $y = 2x+1$ ו־$y = -1$; $m = 1$: פתרון אחד; $0 < m < 1$: שניים; $m \leq 0$ או $m > 1$: אין.

תשע"ז · סמסטר א' · מועד ב'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 129

שאלה 1 פתרון רשמי

קל לחשב $\sqrt[3]{27}=3$, לכן נפתח את $f(x)=x^{1/3}$ סביב 27: $f(27)=3$, $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f'(27)=\frac{1}{27}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$.

$|f''|$ יורדת, לכן לכל $27<c<29$: $|f''(c)|<|f''(27)|=\frac{2}{9\cdot 243}=\frac{2}{2187}<\frac{1}{1000}$.

שארית פולינום מסדר ראשון: $|R_1(29)|=\frac{|f''(c)|}{2!}(29-27)^2<\frac{1}{2\cdot 1000}\cdot 4=\frac{1}{500}$ – מספיק פולינום לינארי.

$P_1(x)=3+\frac{1}{27}(x-27)$, ולכן $\sqrt[3]{29}\approx P_1(29)=3+\frac{2}{27}=\frac{83}{27}\approx 3.074$.

תשובה: $\sqrt[3]{29}\approx\frac{83}{27}\approx 3.074$

שאלה 2 פתרון רשמי

הגרפים נפגשים כאשר $x-1=5-x$, כלומר בנקודה $(3,\sqrt{2})$. $\sqrt{x-1}$ מתחילה ב־$x=1$ ו־$\sqrt{5-x}$ מסתיימת ב־$x=5$.

התחום: מתחת ל־$\sqrt{x-1}$ עבור $1\le x\le 3$ ומתחת ל־$\sqrt{5-x}$ עבור $3\le x\le 5$.

$V=\pi\int_1^3(x-1)dx+\pi\int_3^5(5-x)dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3+\pi\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_3^5=2\pi+2\pi=4\pi$.

תשובה: 4π

שאלה 3א פתרון רשמי

לפי נוסחת הזווית הכפולה $\sin 6x=2\sin 3x\cos 3x$, ולכן $\int\sin 3x\sin 6x\,dx=2\int\sin^2 3x\cos 3x\,dx$.

נציב $u=\sin 3x$, $du=3\cos 3x\,dx$: $\frac{2}{3}\int u^2du=\frac{2}{9}u^3+c$.

$=\frac{2}{9}\sin^3 3x+c$.

תשובה: $\frac{2}{9}\sin^3 3x+c$

שאלה 3ב פתרון רשמי

פירוק לשברים חלקיים: $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$.

אינטגרציה איבר איבר: $\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+c$.

תשובה: $\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+c$

שאלה 4 פתרון רשמי

$A(t)=\int_0^t\sin(x^2)dx$, $B(t)=\frac{t\sin t^2}{2}$; שניהם שואפים ל־0 כאשר $t\to 0$, ולכן אפשר להשתמש בלופיטל. (מדובר בשטח, כלומר $t>0$; אבל הגבול זהה גם משני הצדדים.)

לפי המשפט היסודי $A'(t)=\sin t^2$, ו־$B'(t)=\frac{\sin t^2}{2}+t^2\cos t^2$.

$\lim\frac{\sin t^2}{\frac{\sin t^2}{2}+t^2\cos t^2}=\lim\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos t^2\cdot\frac{t^2}{\sin t^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$, כי $\frac{t^2}{\sin t^2}\to 1$.

תשובה: $\frac{2}{3}$

שאלה 5 פתרון רשמי

נסמן ב־$f_1(t), f_2(t)$ את הדרך שעבר כל רץ עד זמן t; המהירויות הן $f_1'(t), f_2'(t)$. מחפשים t_0 עם $f_1'(t_0) = f_2'(t_0)$.

בזמן הזינוק $t = 0$ שניהם באותה נקודה, ובזמן הסיום המשותף $t = T$ שניהם על קו הסיום. לכן $f = f_1 - f_2$ מקיימת $f(0) = f(T) = 0$.

f רציפה ב־$[0, T]$ וגזירה ב־$(0, T)$, ולפי משפט רול קיימת $0 < t_0 < T$ עם $f'(t_0) = 0$, כלומר $f_1'(t_0) = f_2'(t_0)$.

תשובה: הוכח באמצעות משפט רול על הפרש הדרכים.

תשע"ז · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 130

שאלה 1 פתרון רשמי

חילוק פולינומים עם שארית: $f(x) = x - 4 + \frac{9(x-1)}{(x-1)(x+2)} = x - 4 + \frac{9x-9}{x^2+x-2}$.

לכן $f(x) = x - 4 + \frac{9}{x+2}$ עבור $x \neq 1$, ו־f אינה מוגדרת ב־$x = 1$.

$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (x-4)) = 0$: הישר $y = x - 4$ הוא אסימפטוטה משופעת גם ב־∞ וגם ב־$-\infty$.

ב־$x = -2$ הגבול אינסופי: אסימפטוטה אנכית $x = -2$. ב־$x = 1$ הגבול סופי $(0 = 3 + (-3))$, ולכן אין שם אסימפטוטה למרות שהמכנה מתאפס.

תשובה: $y = x - 4$ (משופעת, בשני הכיוונים) ו־$x = -2$ (אנכית); ב־$x = 1$ אין אסימפטוטה.

שאלה 2 פתרון רשמי

$y = x^2(2 - x)$, $y' = x(4 - 3x)$: הפונקציה יורדת עד 0, עולה עד $\frac{4}{3}$ ויורדת אחר כך. נקודת החיתוך הימנית עם ציר x היא $x = 2$.

$y'(2) = -4$, ולכן המשיק: $L(x) = -4(x-2) = -4x + 8$. הוא חותך את ציר y ב־$(0, 8)$ ואת הגרף בנקודות $(2, 0)$ ו־$(-2, 16)$.

בין $x = 0$ ל־$x = 2$ המשיק מעל הגרף, והשטח המבוקש: $\int_0^2 \left(8 - 4x - 2x^2 + x^3\right) dx$.

$= \left[8x - 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 16 - 8 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{20}{3}$.

תשובה: $\frac{20}{3}$

שאלה 3א פתרון רשמי

$1 + x^3 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. שברים חלקיים: $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$.

אינטגרציה איבר איבר: $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

ובצורה מקוצרת: $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

תשובה: $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

שאלה 3ב פתרון רשמי

נציב $x = 2\sin u$, $dx = 2\cos u\,du$: $\int \frac{8\sin^2 u\cos u}{2\cos u}du = 4\int \sin^2 u\,du$.

$4\int \sin^2 u\,du = 2\int(1-\cos 2u)du = 2u - \sin 2u + C$.

חזרה: $u = \arcsin\frac{x}{2}$, $\sin 2u = 2\sin u\cos u = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. לכן $2\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C$.

תשובה: $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$

שאלה 4 פתרון רשמי

א. $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$: $\int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.

ב. $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$: $-\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.

ג. שתי הפונקציות הן פונקציות קדומות של אותה פונקציה בקטע, ולכן (ממסקנה של משפט לגרנז') הן נבדלות בקבוע. אכן $\frac{\sin^2 x}{2} - \left(-\frac{\cos^2 x}{2}\right) = \frac{1}{2}$; ההבדל נבלע בקבוע האינטגרציה.

תשובה: $\frac{\sin^2 x}{2} + c$ ו־$-\frac{\cos^2 x}{2} + c$; הן נבדלות בקבוע $\frac{1}{2}$.

שאלה 5 פתרון רשמי

א. לפי המשפט היסודי $f'(x) = e^{-\sin x + 2} > 0$ לכל x. לפי משפט לגרנז' f עולה ממש, ולכן חד־חד־ערכית וקיימת לה פונקציה הפוכה.

ב. $f(0) = \int_0^0 \cdots = 0$, ולכן $g(0) = 0$.

לפי נוסחת הנגזרת של הפונקציה ההפוכה: $g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = e^{\sin 0 - 2} = e^{-2}$.

תשובה: $g'(0) = e^{-2}$

תשע"ו · סמסטר ב' · מועד ב'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 131

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נתחיל בתחום ההגדרה: $x^2-1>0$, כלומר $D=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. מתקיים $\lim_{x\to -1^-} f=\lim_{x\to 1^+} f=-\infty$: אסימפטוטות אנכיות $x=\pm 1$.

הנגזרת היא

$$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-1},$$

מתאפסת ב־$x=-1\pm\sqrt{2}$; רק $x=-1-\sqrt{2}$ בתחום. בקטע $(-\infty,-1-\sqrt{2})$ $f'>0$ (עולה), בקטע $(-1-\sqrt{2},-1)$ $f'<0$ (יורדת), ובקטע $(1,\infty)$ $f'>0$ (עולה).

מקסימום מקומי ב־$x=-1-\sqrt{2}$:

$$f=-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})\approx -0.84.$$

(לא בסילבוס הנוכחי) הנגזרת השנייה היא

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0,$$

ולכן הפונקציה קעורה ($\cap$) בכל התחום ואין נקודות פיתול.

מתקיים $\lim_{x\to\infty} f=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f=-\infty$. בנוסף $\frac{f(x)}{x}\to 1$ אבל $f(x)-x=\ln(x^2-1)\to\infty$, לכן אין אסימפטוטות משופעות או אופקיות.

חיתוך עם ציר x: בענף השמאלי המקסימום שלילי ולכן אין אפסים; בענף הימני f רציפה (כסכום והרכבה של פונקציות רציפות) ועולה מ־$-\infty$ ל־∞, ולכן יש אפס יחיד.

תשובה: תחום $|x|>1$; אסימפטוטות אנכיות $x=\pm 1$; מקסימום מקומי ב־$x=-1-\sqrt{2}$ (ערך ≈ -0.84); עולה ב־$(-\infty,-1-\sqrt{2})$ וב־$(1,\infty)$, יורדת ב־$(-1-\sqrt{2},-1)$; קעורה בכל התחום; אין אסימפטוטות משופעות.

שאלה 2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

מספיק להוכיח עבור $k=1$ ולהמשיך באינדוקציה, כי f' הוא פולינום ממעלה $n-1$ עם מקדם מוביל $na_0\neq 0$.

יהיו $x_1<x_2<\cdots<x_n$ השורשים של f. הפולינום f רציף ב־$\mathbb{R}$, ולכן לפי משפט רול בכל קטע $[x_i,x_{i+1}]$ קיימת $c_i\in(x_i,x_{i+1})$ עם $f'(c_i)=0$. הקטעים הפתוחים זרים, ולכן ל־f' יש לפחות $n-1$ שורשים שונים.

מצד שני, f' פולינום ממעלה $n-1$ שאינו אפס, ולכן יש לו לכל היותר $n-1$ שורשים. לכן יש לו בדיוק $n-1$ שורשים שונים.

באינדוקציה: אם ל־$f^{(k)}$ (ממעלה $n-k$) יש בדיוק $n-k$ שורשים שונים, אותו טיעון נותן ל־$f^{(k+1)}$ בדיוק $n-k-1$ שורשים. (עבור $k=n$: $f^{(n)}=n!a_0\neq 0$, 0 פתרונות.)

תשובה: הוכח באמצעות משפט רול ואינדוקציה.

שאלה 3א1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בפיתוח טיילור:

$$\arcsin u = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3).$$

נציב ונקבל

$$\arcsin 2x = 2x + \frac{8x^3}{6} + o(x^3),$$
$$2\arcsin x = 2x + \frac{2x^3}{6} + o(x^3).$$

ההפרש הוא $x^3 + o(x^3)$, ולכן הגבול 1. (אפשר גם בלופיטל שלוש פעמים.)

תשובה: 1

שאלה 3א2 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה היכן הביטוי מוגדר: עבור $x < 1$ קרוב ל־1 מתקיים $1 + \frac{1}{\ln x} < 0$ והביטוי אינו מוגדר, לכן הגבול הוא למעשה $x \to 1^+$.

נסמן $s = \ln x \to 0^+$; אז $1 - x = 1 - e^s$ וכן

$$\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \ln(1+s) - \ln s.$$

הלוגריתם של הביטוי:

$$(1 - e^s)\,(\ln(1+s) - \ln s).$$

מכיוון ש־$1 - e^s \sim -s$, ו־$s \ln s \to 0$, $s\ln(1+s) \to 0$, הלוגריתם שואף ל־0.

לכן, מרציפות e^x ב־$\mathbb{R}$, הגבול הוא $e^0 = 1$.

תשובה: 1

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב את הנגזרות של f בנקודה 1. מתקיים $f(1)=0$, והאינטגרנד e^{t^3} רציף ב־$\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות רציפות.

לכן לפי המשפט היסודי $f'(x)=e^{x^3}$, $f''(x)=3x^2e^{x^3}$, $f'''(x)=(6x+9x^4)e^{x^3}$. בנקודה 1: $f'(1)=e$, $f''(1)=3e$, $f'''(1)=15e$.

מכאן שפולינום טיילור הוא

$$P_3(x)=e(x-1)+\frac{3e}{2}(x-1)^2+\frac{5e}{2}(x-1)^3.$$

בסעיף ג1 נקבל

$$\int_1^{1.1} e^{t^3}dt=f(1.1)\approx P_3(1.1)=e(0.1+0.015+0.0025)=0.1175e\approx 0.3194.$$

בסעיף ג2, לפי שארית לגרנז'

$$R_3=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$$

עם $c\in(1,1.1)$, כאשר $f^{(4)}(x)=3(9x^6+18x^3+2)e^{x^3}$ עולה בקטע.

לכן

$$|R_3|\le\frac{3(9\cdot 1.1^6+18\cdot 1.1^3+2)e^{1.331}}{24}\cdot 10^{-4}\approx\frac{475.8}{24}\cdot 10^{-4}<0.002.$$

תשובה: $P_3=e(x-1)+\frac{3e}{2}(x-1)^2+\frac{5e}{2}(x-1)^3$; $\int_1^{1.1}e^{t^3}dt\approx 0.1175e\approx 0.319$, שגיאה <0.002.

שאלה 4א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפצל את האינטגרל ב־1 ונבדוק כל חלק במבחן ההשוואה. בקטע $(0,1]$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{x}},$$

ו־$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס.

בקטע $[1,\infty)$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\le\frac{1}{x^{3/2}},$$

ו־$\int_1^\infty x^{-3/2}dx$ מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה שני החלקים מתכנסים, ולכן האינטגרל מתכנס.

תשובה: מתכנס.

שאלה 1ב4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

המכנה הוא $\cos x(\cos x-1)^2$. נציב $u=\cos x$, $du=-\sin x\,dx$:

$$I=-\int \frac{du}{u(u-1)^2}.$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{u(u-1)^2}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}.$$

נקבל

$$I=-\ln|u|+\ln|u-1|+\frac{1}{u-1}+C.$$

לכן

$$I=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\cos x}\right|+\frac{1}{\cos x-1}+C.$$

תשובה: $\ln\left|\frac{1-\cos x}{\cos x}\right|+\frac{1}{\cos x-1}+C$

שאלה 2ב4 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפצל את קטע האינטגרציה לפי סימן $\cos x$. בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $\cos x\geq 0$ ולכן האינטגרנד שווה $\cos x$; בקטע $[\frac{\pi}{2},\pi]$ מתקיים $\cos x\leq 0$ והאינטגרנד שווה 0.

לכן האינטגרל שווה

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

תשובה: 1

תשע"ו · סמסטר ב' · מועד א'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **133**

שאלה 1 פתרון רשמי

תחום: $x^2-4\geq 0$, כלומר $D=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$. אין חיתוך עם ציר y ($0\notin D$), ולמשוואה $\sqrt{x^2-4}=2x$ אין פתרון (נדרש $x\geq 0$ ו־$x^2-4=4x^2$), לכן אין חיתוך עם ציר x.

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-2=\frac{x-2\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$, מתאפסת רק ב־$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. f יורדת ב־$(-\infty,-2)$, עולה ב־$(2,\frac{4\sqrt{3}}{3})$ ויורדת ב־$(\frac{4\sqrt{3}}{3},\infty)$;
מקסימום מקומי $f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{3}$. (בקצוות $x=\pm 2$ הפונקציה אינה גזירה.)

(לא בסילבוס הנוכחי) $f''(x)=\frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}<0$ בכל פנים התחום: הפונקציה קעורה ($\cap$) בשני הענפים ואין נקודות פיתול.

אין אסימפטוטות אנכיות: $f(-2)=4$, $f(2)=-4$.
ב־$+\infty$: $a=\lim\frac{f(x)}{x}=-1$, $b=\lim(\sqrt{x^2-4}-x)=\lim\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0$, כלומר $y=-x$. ב־$-\infty$: $a=-3$,
$b=\lim(\sqrt{x^2-4}+x)=0$, כלומר $y=-3x$.

תשובה: תחום $|x|\geq 2$; מקסימום מקומי $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},-2\sqrt{3}\right)$; קעורה בכל התחום; אסימפטוטות משופעות $y=-x$ (ב־$+\infty$) ו־$y=-3x$ (ב־$-\infty$).

שאלה 2 פתרון רשמי

f גזירה ולכן רציפה ב־$[a,b]$; לפי ויירשטראס היא מקבלת מינימום ומקסימום בקטע.

נראה ששני הקצוות אינם יכולים להיות שניהם נקודות הקיצון. נניח בשלילה, למשל, $f(a)=\min f$ ו־$f(b)=\max f$. אז לכל $x>a$ מתקיים $f(x)\geq f(a)$, ולכן $f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$; ו־$f(x)\leq f(b)$ לכל \(x

לכן אחת מנקודות הקיצון המוחלט מתקבלת בנקודה פנימית $c\in(a,b)$, ולפי משפט פרמה $f'(c)=0$.

תשובה: הוכח (ויירשטראס + פרמה).

שאלה 3א1 פתרון רשמי

נכתוב את הביטוי כ־$\frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt}{1/x}$; כאשר $x\to 0^+$ זו צורה $\frac{\infty}{\infty}$.

לפי המשפט היסודי $\left(\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt\right)'=-\frac{\cos x}{x^2}$, ו־$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

לפי לופיטל הגבול הוא $\lim \frac{-\cos x/x^2}{-1/x^2}=\lim \cos x=1$.

תשובה: 1

שאלה 3א2 פתרון רשמי

צורה $\frac{0}{0}$. לפי לופיטל: $\lim \frac{-\sin x+\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}}{2\sin x\cos x}$.

נפריד: $\lim \frac{-\sin x\sqrt{1-2x^2}+2x}{\sin x}\cdot \lim \frac{1}{2\cos x\sqrt{1-2x^2}}=$.

$=\frac{1}{2}\lim\left(-\sqrt{1-2x^2}+\frac{2x}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}(-1+2)=\frac{1}{2}$.

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 3ב פתרון רשמי

נכתוב: $ax^2+b(e^{x^2}-1)-\sin x^2=x^4+o(x^4)$ ונפתח עד סדר 4.

$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$, $\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{6}+\cdots=x^2+o(x^4)$.

מציבים: $ax^2+b\left(x^2+\frac{x^4}{2}\right)-x^2+o(x^4)=x^4+o(x^4)$.

השוואת מקדמים: $a+b-1=0$, $\frac{b}{2}=1$, ולכן $b=2$, $a=-1$.

תשובה: $a=-1,\ b=2$

שאלה 4א פתרון רשמי

מכיוון ש־$|\cos x|\geq \cos^2 x$: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+100}dx\geq \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+100}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$.

$\frac{\sqrt{x}}{x+100}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$ כאשר $x\to\infty$, ולכן $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+100}dx$ מתבדר.

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה ($\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ יורדת לאפס עבור $x>100$ והאינטגרלים של $\cos 2x$ חסומים).

סכום של מתבדר ומתכנס מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה האינטגרל המקורי מתבדר.

תשובה: מתבדר.

שאלה 1ב4 פתרון רשמי

$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+1} = \frac{(\sin x+1)-1+\cos x}{\sin x+1} = 1 + \frac{\cos x}{\sin x+1} - \frac{1}{\sin x+1}$.

$\int \frac{\cos x}{\sin x+1}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x+1} = \ln(1+\sin x)$.

בהצבה האוניברסלית $t = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$: $\int \frac{dx}{\sin x+1} = \int \frac{2\,dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t}$.

לכן $I = x + \ln(1+\sin x) + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$.

הערה: בפתרון הרשמי נכתב $\ln|\sin x|$ במקום $\ln(1+\sin x)$ (וגם $\int \frac{dt}{(1+t)^2}$ במקום $\int \frac{2dt}{(1+t)^2}$); כאן מוצגת הגרסה המתוקנת, שנבדקה בגזירה.

תשובה: $x + \ln(1+\sin x) + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$

שאלה 2ב4 פתרון רשמי

נציב $t = \ln x$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$; כאשר $x = 1$ מתקבל $t = 0$, וכאשר $x \to \infty$ גם $t \to \infty$. האינטגרל הופך ל־$\int_0^\infty te^{-t/2}dt$.

אינטגרציה בחלקים עם $u = t$, $dv = e^{-t/2}dt$, $v = -2e^{-t/2}$: $\int_0^\infty te^{-t/2}dt = \left[-2te^{-t/2}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-t/2}dt$.

$\left[-2te^{-t/2}\right]_0^\infty = 0$ ו־$2\int_0^\infty e^{-t/2}dt = 2\cdot 2 = 4$. האינטגרל מתכנס ושווה 4.

הערה: בפתרון הרשמי נכתב בטעות שעבור $x = 1$ מתקבל $t = e$ (במקום $t = 0$), והתוצאה שם היא $(2e+4)e^{-e/2}$. הערך הנכון הוא 4 (נבדק גם ב־sympy); כאן מוצג החישוב המתוקן באותה שיטה.

תשובה: 4

תשע"ו · סמסטר א' · מועד א'

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **135**

שאלה 1 פתרון רשמי

ידוע ש־$\sqrt[n]{n} \to 1$ (למשל ממבחן המנה/השורש: עבור $a_n = n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ ולכן $\sqrt[n]{a_n} \to 1$).

מרציפות cos: $\cos\sqrt[n]{n} \to \cos 1$.

$\frac{n^2}{1+3n^2} = \frac{1}{1/n^2+3} \to \frac{1}{3}$, ולפי אריתמטיקה של גבולות הגבול הוא $\frac{\cos 1}{3}$.

תשובה: $\frac{\cos 1}{3}$

שאלה 2 פתרון רשמי

נסמן $y = (\tan x)^{\tan 2x}$, אז $\ln y = \tan 2x \cdot \ln(\tan x) = \frac{\ln(\tan x)}{1/\tan 2x}$, מהצורה $\frac{0}{0}$.

לפי לופיטל: $\lim \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = \lim \frac{\sin^2 2x}{-2\sin x\cos x} = \lim(-\sin 2x) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$.

מרציפות האקספוננט: $\lim y = e^{-1}$.

תשובה: e^{-1}

שאלה 3 פתרון רשמי

ב־$(0,1)$ הפונקציה רציפה כמכפלה של פונקציות אלמנטריות. צריך רציפות חד־צדדית בקצוות.

ב־0: $x\ln x\cdot\frac{\ln(1-x)}{x}$. $\ln x\ln(1-x)=x\ln x$. לפי לופיטל $x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}\to\lim\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim(-x)=0$, ו־$\frac{\ln(1-x)}{x}\to -1$ (גבול יסודי). לכן הגבול 0 ו־$a=0$.

ב־1: עם $t=1-x\to 0^+$ מקבלים $\ln t\ln(1-t)\to 0$ מאותו חישוב, ולכן $b=0$.

תשובה: $a=b=0$

שאלה 4 פתרון רשמי

נציב $t=\frac{1}{x}$, $dt=-\frac{1}{x^2}dx$: האינטגרל הופך ל־$-\int\frac{e^t\,dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$.

נציב $u=e^t$, $du=e^t dt$: מתקבל $-\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-\arcsin u+C$.

חזרה למשתנה המקורי: $-\arcsin e^{1/x}+C$.

תשובה: $-\arcsin\left(e^{1/x}\right)+C$

שאלה 5 פתרון רשמי

נציב $t=\tan x$, $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$: $I=\int\frac{dt}{t^4+t^2}=\int\frac{dt}{t^2(t^2+1)}$.

פירוק לשברים חלקיים: $\frac{1}{t^2(t^2+1)}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}$.

$I=-\frac{1}{t}-\arctan t+C=-\frac{1}{\tan x}-x+C$.

תשובה: $-\cot x-x+C$

שאלה 6 פתרון רשמי

המונה והמכנה שואפים ל־0 (האינטגרל רציף כפונקציה של הגבול העליון), ולכן אפשר להפעיל לופיטל.

לפי המשפט היסודי, נגזרת המונה היא $e^{x^2}-x-1$, ונגזרת המכנה $-2\sin 2x$. שוב מקבלים $\frac{0}{0}$.

לופיטל נוסף: $\lim\frac{2xe^{x^2}-1}{-4\cos 2x}=\frac{0-1}{-4}=\frac{1}{4}$.

תשובה: $\frac{1}{4}$

שאלה 7 פתרון רשמי

f רציפה לכל $x\neq 0$, וגם ב־0: $\lim_{x\to 0}e^{-1/|x|}=0=f(0)$.

לכל x מתקיים $f(x)\geq 0=f(0)$, לכן 0 הוא המינימום המוחלט, המתקבל ב־$x=0$.

$f(x)<1$ לכל x אבל $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=e^0=1$. לכן $\sup f=1$ אך אינו מתקבל, ואין מקסימום מוחלט.

תשובה: מינימום מוחלט 0 ב־$x=0$; אין מקסימום מוחלט ($\sup f=1$ אינו מתקבל).

שאלה 8 פתרון רשמי

נגדיר $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)-x\ln x$ עבור $x>0$. אז $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$ (כי $x\ln x\to 0$).

$f'(x)=x-\ln x-1$. נסמן $g(x)=x-\ln x-1$: $g'(x)=1-\frac{1}{x}=0 \iff x=1$, ו־$g''(x)=\frac{1}{x^2}>0$, לכן $x=1$ מינימום מוחלט של g ו־$g(x)\geq g(1)=0$.

לכן $f'(x)\geq 0$ ו־f עולה ב־$(0,\infty)$. מכאן $f(x)\geq \lim_{t\to 0^+} f(t)=\frac{1}{2}>0$ לכל $x>0$, וזה האי־שוויון המבוקש.

תשובה: הוכח: $\frac{x^2+1}{2}-x\ln x\geq \frac{1}{2}>0$.

שאלה 9 פתרון רשמי

נסמן את אורך השוק ב־x; הבסיס $1-2x$, ותנאי קיום: $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$. הגובה לבסיס: $h=\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$.

השטח: $S(x)=\frac{h(1-2x)}{2}=\left(\frac{1}{2}-x\right)\sqrt{x-\frac{1}{4}}$.

$S'(x)=-\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}-x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}=\frac{1-3x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}=0 \iff x=\frac{1}{3}$; S' חיובית משמאל ושלילית מימין (וגם $S''(\frac{1}{3})<0$), לכן מקסימום.

$S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}$ – המשולש שווה הצלעות.

תשובה: $\frac{1}{12\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{36}$

שאלה 10 פתרון רשמי

a)\ $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[a,b]$,

$|f(x)|=1$ קבועה ולכן אינטגרבילית.

ל־f עצמה: בכל חלוקה יש בכל תת־קטע נקודות רציונליות ואי־רציונליות. בחירת נקודות רציונליות נותנת סכומי רימן $\sum \frac{b-a}{n}\cdot 1=b-a$, ובחירת אי־רציונליות נותנת $-(b-a)$.

סכומי רימן אינם מתכנסים לגבול אחד, לכן f אינה אינטגרבילית.

תשובה: הטענה לא נכונה (דוגמה: פונקציה השווה 1 ברציונליים ו־-1 באי־רציונליים).

תשע"ה · סמסטר ב׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 137

שאלה 1 פתרון רשמי

תחום הגדרה $\mathbb{R}$; f זוגית ולכן סימטרית ביחס לציר y. נחקור את $f(x)=e^{\arctan x}$ עבור $x\geq 0$. חיתוך עם ציר y ב־$(0,1)$, אין חיתוך עם ציר x.

אין אסימפטוטות אנכיות. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ו־$\lim_{x\to\infty}e^{\arctan x}=e^{\pi/2}$, ולכן $y=e^{\pi/2}$ אסימפטוטה אופקית (בשני הכיוונים, מהסימטריה).

ל־$x>0$: $f'(x)=\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}>0$; ל־$x<0$: $f'(x)=-\frac{e^{-\arctan x}}{1+x^2}<0$. לכן ב־$x=0$ מינימום מקומי (ומוחלט) $f(0)=1$; $f'(0^-)=-1, f'(0^+)=1$, כך ש־f לא גזירה ב־0.

(לא בסילבוס הנוכחי) ל־$x>0$: $f''(x)=e^{\arctan x}\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}$: קמורה ב־$(0,\frac{1}{2})$, קעורה ב־$(\frac{1}{2},\infty)$. מהסימטריה נקודות הפיתול הן $\left(\pm\frac{1}{2},e^{\arctan(1/2)}\right)$.

תשובה: מינימום מוחלט $(0,1)$ (נקודת אי־גזירות), יורדת ל־$x<0$ ועולה ל־$x>0$, אסימפטוטה אופקית $y=e^{\pi/2}$, פיתול ב־$x=\pm\frac{1}{2}$.

שאלה 2א פתרון רשמי

P הוא פולינום טיילור מסדר $2n$ של e^x סביב 0, ולכן $e^x=P(x)+R_{2n}(x)$.

לפי שארית לגרנז׳: $R_{2n}(x)=\frac{e^c}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ עבור c בין 0 ל־x.

$e^c>0$ ועבור $x<0$ מתקיים $x^{2n+1}<0$, ולכן $e^x-P(x)=R_{2n}(x)<0$.

(דרך אחרת: $g(x)=e^{-x}P(x)$ מקיימת $g'(x)=-\frac{x^{2n}}{(2n)!}e^{-x}<0$ ל־$x\neq 0$, ולכן g יורדת ו־$g(x)>g(0)=1$ ל־$x<0$.)

תשובה: נובע מסימן שארית לגרנז׳.

שאלה 2ב פתרון רשמי

נגדיר $f(x)=\int_0^x e^{-t^4}dt-x$. לפי המשפט היסודי $f'(x)=e^{-x^4}-1$.

$f'(x)<0$ לכל $x\neq 0$ (ו־$f'(0)=0$), ולכן f יורדת ממש בקטע $[-1,1]$.

$f(0)=0$, ולכן $x=0$ פתרון, והוא יחיד ממונוטוניות ממש.

תשובה: הפתרון היחיד הוא $x=0$.

שאלה 3א פתרון רשמי

$\lim_{x\to 0^+}(1+bx)^{\frac{c}{2x}}=e^{\frac{bc}{2}}$ (מקרה 1^∞). משמאל, $2^{1/x}\to 0$; אם $a=0$ הגבול השמאלי הוא e^{b+5}, ואם $a\neq 0$ אז $\frac{a}{x}\to\pm\infty$.

1) רציפות: $a=0$ ו־$e^2=e^{bc/2}=e^{b+5}$, כלומר $b+5=2=\frac{bc}{2}$: $a=0,\ b=-3,\ c=-\frac{4}{3}$.

2) סליקה: $a=0$ ו־$b+5=\frac{bc}{2}\neq 2$, כלומר $c=\frac{10}{b}+2$: $a=0,\ b\neq -3,\ b\neq 0,\ c=\frac{10}{b}+2$.

3) מסוג ראשון: $a=0$ ו־$b+5\neq\frac{bc}{2}$ (למשל $b\neq 0,\ c\neq\frac{10}{b}+2$).

4) מסוג שני: $a\neq 0$ כלשהם b,c (הגבול השמאלי אינסופי).

הערה: בסעיף 3 הפתרון הרשמי מציין $b\neq 0$, אך גם $b=0$ (עם $a=0$) נותן אי־רציפות מסוג ראשון, כי אז $b+5=5\neq 0=bc/2$.

תשובה: 1) $a=0, b=-3, c=-\frac{4}{3}$ 2) $a=0,\ b\neq -3, 0,\ c=\frac{10}{b}+2$ 3) $a=0,\ b+5\neq\frac{bc}{2}$ 4) $a\neq 0$.

שאלה 3ב פתרון רשמי

$(1+x)^{x^2}=e^{x^2\ln(1+x)}$, ו־$x^2\ln(1+x)=x^3-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$.

מ־$e^u=1+u+o(u)$: $(1+x)^{x^2}=1+x^3+o(x^3)$.

לכן $\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=\frac{x^3+o(x^3)}{x^n}$, והגבול סופי ושונה מאפס רק עבור $n=3$, ואז הוא שווה 1.

תשובה: $n=3$, הגבול 1.

שאלה 3ג פתרון רשמי

$\sqrt{4+e^{-t}}\geq 2$, ולכן $\int_1^x\sqrt{4+e^{-t}}dt\geq 2(x-1)\to\infty$: מקרה $\frac{\infty}{\infty}$.

לפי לופיטל והמשפט היסודי: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+e^{-x}}}{1}=2$.

תשובה: 2

שאלה 4א פתרון רשמי

בקטע $[0,1]$ הפונקציה רציפה ($x^2+\cos x>0$), ולכן החלק $\int_0^1$ הוא אינטגרל רגיל.

כאשר $x\to\infty$: $\sqrt[4]{x^2+\cos x}\sim\sqrt{x}$, ולכן האינטגרנד $\sim\frac{1}{x^{3/2}}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}}{(x+1)\sqrt[4]{x^2+\cos x}}=1$.

$\int_1^\infty\frac{dx}{x^{3/2}}$ מתכנס ($p=\frac{3}{2}>1$), ולפי מבחן ההשוואה הגבולי גם $\int_1^\infty$ מתכנס.

לכן האינטגרל כולו מתכנס.

תשובה: האינטגרל מתכנס.

שאלה 4ב פתרון רשמי

העקומה היא שושנה בעלת שלושה עלים; כל עלה מתקבל כאשר φ עובר קטע באורך $\frac{2\pi}{3}$.

$S=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}a^2\sin^2\frac{3\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{3a^2}{4}\int_0^{2\pi/3}(1-\cos 3\varphi)\,d\varphi$

$=\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{2}$.

תשובה: $\frac{\pi a^2}{2}$

שאלה 4ג פתרון רשמי

בשיטת הקליפות הגליליות: $V=2\pi\int_1^2 xe^x\,dx$.

אינטגרציה בחלקים: $\int xe^xdx=xe^x-e^x$.

$V=2\pi[(x-1)e^x]_1^2=2\pi e^2$.

תשובה: $2\pi e^2$

תשע"ה · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד 139

שאלה 1 פתרון רשמי

תחום הגדרה: $x \neq 0$. אין חיתוך עם ציר y; חיתוך עם ציר x ב־$(-2,0)$.

$y' = e^{1/x} + (x+2)e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$. עולה ב־$(-\infty,-1)$ וב־$(2,\infty)$, יורדת ב־$(-1,0)$ וב־$(0,2)$. מקסימום מקומי $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$, מינימום מקומי $(2,4\sqrt{e})$.

$\lim_{x\to 0^-} y = 0$, $\lim_{x\to 0^+} y = \infty$: אסימפטוטה אנכית ימנית $x=0$.

$a = \lim \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim\left((x+2)e^{1/x} - x\right) = \lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)e^t - 1}{t} = 3$ (לופיטל, $t=\frac{1}{x}$); לכן $y = x+3$ אסימפטוטה משופעת ב־$\pm\infty$.

(לא בסילבוס הנוכחי) $y'' = e^{1/x}\frac{5x+2}{x^4}$: קעורה ב־$\left(-\frac{2}{5},-\infty\right)$, קמורה ב־$\left(-\frac{2}{5},0\right)$ וב־$(0,\infty)$. נקודת פיתול $\left(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-5/2}\right)$.

תשובה: מקס׳ $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$, מינ׳ $(2,4\sqrt{e})$, אסימפטוטות $x=0$ (מימין) ו־$y=x+3$, פיתול ב־$x=-\frac{2}{5}$.

שאלה 2א פתרון רשמי

נגדיר $f(t)=e^{-at}$, רציפה ב־$[0,x]$ וגזירה ב־$(0,x)$.

לפי לגרנז׳ קיים $c\in(0,x)$ כך ש־$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, כלומר $-ae^{-ac}=\frac{e^{-ax}-1}{x}$, או $ae^{-ac}=\frac{1-e^{-ax}}{x}$.

e^{-at} יורדת, ולכן מ־$0<c<x$: $ae^{-ax}<ae^{-ac}<ae^0=a$.

תשובה: נובע ממשפט לגרנז׳ עבור e^{-at} בקטע $[0,x]$.

שאלה 2ב פתרון רשמי

נגדיר $f(x)=x\sqrt{x}-e^{-x}$, רציפה ב־$[0,\infty)$ וגזירה ב־$(0,\infty)$.

קיום: $f(0)=-1<0$, $f(1)=1-\frac{1}{e}>0$, ולפי ערך הביניים קיים $x_0\in(0,1)$ עם $f(x_0)=0$.

יחידות: אם היה פתרון נוסף $x_1\neq x_0$, לפי רול הייתה נקודה c ביניהם עם $f'(c)=0$.

אבל $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+e^{-x}>0$ לכל $x\geq 0$ — סתירה. לכן הפתרון יחיד.

תשובה: קיים פתרון יחיד (בקטע $(0,1)$).

שאלה 3א פתרון רשמי

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \overset{L}{=} \lim\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim\frac{(e^x-1)/x}{(e^x-1)/x+e^x} = \frac{1}{2}$, ולכן f רציפה ב־0.

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}-\frac{1}{e^h-1}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2e^h-2-h-he^h}{2h^2(e^h-1)}$.

אחרי שלוש הפעלות של לופיטל מתקבל $-\frac{1}{12} = \lim_{h\to 0}\frac{-e^h}{4\frac{e^h-1}{h}+8e^h+2he^h}$.

לכן f גזירה ב־0 ו־$f'(0)=-\frac{1}{12}$.

תשובה: רציפה וגזירה, $f'(0)=-\frac{1}{12}$.

שאלה 3ב2 פתרון רשמי

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)$.

המכפלה: $\cos x\sqrt{1+x^2} = 1 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.

לכן הגבול הוא $\frac{1}{3}$.

תשובה: $\frac{1}{3}$

שאלה 2ב3 פתרון רשמי

נוציא x מהמונה: הגבול שווה $\lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^{x(\ln x+1)}-1}{1-x}$, מקרה $\frac{0}{0}$.

$(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$, ולכן לפי לופיטל: $\lim_{x\to 1} \frac{x^{x(\ln x+1)^2 + x^x\cdot\frac{1}{x}}}{-1} = \frac{2}{-1}$.

הגבול הוא $1 \cdot (-2) = -2$.

תשובה: -2

שאלה 4א פתרון רשמי

נשווה ל־$g(x) = \frac{1}{x(\ln x+1)}$: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$.

$\int_1^b \frac{dx}{x(\ln x+1)} = \ln(\ln b + 1) \to \infty$, כלומר $\int_1^\infty g$ מתבדר.

לפי מבחן ההשוואה הגבולי גם האינטגרל הנתון מתבדר.

תשובה: האינטגרל מתבדר.

שאלה 4ב פתרון רשמי

נחלק: $S = S_1 + S_2$, כאשר S_1 השטח שבין הציקלואידה לציר x ו־S_2 השטח שבין ציר x לישר $y = -x$ עבור $0 \le x \le 4\pi$.

$dx = 2(1-\cos t)dt$, ולכן $S_1 = \int_0^{2\pi} 4(1-\cos t)^2 dt = 4\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 12\pi$.

$S_2 = \int_0^{4\pi} x\,dx = \frac{16\pi^2}{2} = 8\pi^2$.

$S = 12\pi + 8\pi^2$.

תשובה: $12\pi + 8\pi^2$

שאלה 4ג פתרון רשמי

$y' = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}} - \frac{1}{e^{2x}} \cdot \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\left(1 - e^{-2x}\right) = \sqrt{e^{2x}-1}$.

$L = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^1 \sqrt{e^{2x}}dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$.

תשובה: $e - 1$

תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד מיוחד

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **141**

שאלה 1א פתרון רשמי

נסמן $a_n = \frac{n!}{n^n}$, כך ש־$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{a_n}$.

לפי מבחן השורש (אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ מתכנסת אז $\sqrt[n]{a_n}$ מתכנסת לאותו גבול).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

תשובה: $\frac{1}{e}$

שאלה 1ב פתרון רשמי

המונה והמכנה שואפים לאינסוף, נשתמש בלופיטל.

$$\lim \frac{3x\ln x+3x}{3x\ln x+5} = \lim \frac{\frac{3\ln x+3}{3x\ln x+5}}{\frac{1}{x}}.$$

נחלק ב־$3x\ln x$: $\lim \frac{1+\frac{1}{\ln x}}{1+\frac{5}{3x\ln x}} = 1$, כי $\ln x \to \infty$.

תשובה: 1

שאלה 2א פתרון רשמי

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{\pi}{2}$.

$f(x) = e^{\sin x \ln x}$, ולכן $f'(x) = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\right)$.

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi} + 0\right) = 1$.

המשיק: $y = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = x$.

תשובה: $y = x$

שאלה 2ב פתרון רשמי

נסמן $f(x) = (1+x)^{1/2}$. לפי טיילור עם שארית לגרנז׳ סביב 0: קיים $c \in (0,x)$ כך ש־

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4.$$

$f' = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f'' = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$, $f''' = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$, $f^{(4)} = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}$.

לכן $f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=-\frac{1}{4}, f'''(0)=\frac{3}{8}$, ו־$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{15(1+c)^{-7/2}x^4}{16\cdot 4!}$.

האיבר האחרון שלילי, ולכן מתקבל האי־שוויון.

תשובה: הוכחה באמצעות שארית לגרנז׳ מסדר 4.

שאלה 2ג פתרון רשמי

$f(0)=\sqrt{4}=2$.

מימין: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim x\sin\frac{1}{x}=0$ (חסומה כפול שואפת לאפס).

משמאל: $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}=\lim\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+2)}=-\frac{1}{4}$.

הנגזרות החד־צדדיות שונות, ולכן f אינה גזירה ב־0.

תשובה: הטענה שגויה: הנגזרות החד־צדדיות הן 0 ו־$-\frac{1}{4}$.

שאלה 3א פתרון רשמי

נציב $\theta=\arctan x$, $d\theta=\frac{dx}{1+x^2}$, $\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^2\theta\,d\theta=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$.

$=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

תשובה: $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

שאלה 3ב פתרון רשמי

$V=\pi\int_0^{3/2}\frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

נציב $x=3\sin\theta$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{6}]$: $V=\pi\int_0^{\pi/6}\frac{27\sin^3\theta}{3\cos\theta}3\cos\theta\,d\theta=27\pi\int_0^{\pi/6}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$.

נציב $u=\cos\theta$: $V=27\pi\int_{\sqrt{3}/2}^{1}(1-u^2)du=27\pi\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt{3}/2}^{1}$.

$V=27\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

תשובה: $27\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

שאלה 4א פתרון רשמי

תחום ההגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ו־f רציפה בו; יש לבדוק רק את $x=0$.

$\lim_{x\to 0}x\ln|x|=\lim\frac{\ln|x|}{1/x}=\lim\frac{1/x}{-1/x^2}=0$ (לופיטל), ולכן $\lim_{x\to 0}f(x)=0$: אין אסימפטוטה אנכית.

כאשר $x\to\pm\infty$: $f(x)+5x=\frac{x\ln|x|}{x^2+1}\to 0$ (לופיטל פעמיים), ולכן $y=-5x$ אסימפטוטה משופעת בשני הכיוונים; אין אופקיות.

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln|x|}{x^2+1}-5\to -5$ (לופיטל).

תשובה: אין אנכיות ואין אופקיות; $y=-5x$ משופעת ב־$\pm\infty$.

שאלה 4ב פתרון רשמי

$g'(x)=4x^3e^{x+5}+x^4e^{x+5}$.

$g''(x)=(12x^2+8x^3+x^4)e^{x+5}=(x+2)(x+6)x^2e^{x+5}$.

$g''\geq 0$ עבור $x\in(-\infty,-6]\cup[-2,\infty)$ ו־$g''<0$ עבור $x\in(-6,-2)$.

תשובה: $(-\infty,-6]\cup[-2,\infty)$

שאלה 5 פתרון רשמי

אם $a<0$ אז $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, ואם $b<0$ אז $\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$; בשני המקרים אין מקסימום גלובלי.

אם $a,b>0$: $f'(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}\left[a-(a+b)x\right]$, שמתאפסת רק ב־$(0,1)$ $x=\frac{a}{a+b}\in(0,1)$.

$f'>0$ ב־$\left(0,\frac{a}{a+b}\right)$ ו־$f'<0$ ב־$\left(\frac{a}{a+b},1\right)$, לכן זו נקודת מקסימום גלובלי יחידה.

תשובה: אם $a<0$ או $b<0$: אין מקסימום; אם $a,b>0$: מקסימום גלובלי יחיד ב־$x=\frac{a}{a+b}$.

שאלה 6 פתרון רשמי

נסמן $a=\min\{p,q\}$, $b=\max\{p,q\}$; f רציפה ב־$[a,b]$.

הממוצע מקיים $\min\{f(a),f(b)\}\le\frac{f(a)+f(b)}{2}\le\max\{f(a),f(b)\}$.

לפי משפט ערך הביניים קיים $x_0\in[a,b]$ עם $f(x_0)=\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{f(p)+f(q)}{2}$.

תשובה: נובע ממשפט ערך הביניים בקטע שבין p ל־q.

תשע"ה · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **143**

שאלה 1א פתרון רשמי

כל אחד מ־n המחוברים במכנה גדול או שווה ל־$\frac{1}{\sqrt{n}}$, ולכן המכנה $\ge\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}>0$.

לכן $0<\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$.

כיוון ש־$\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$, לפי משפט הסנדוויץ׳ הגבול הוא 0.

תשובה: 0

שאלה 1ב פתרון רשמי

נרשום $\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}=e^{\frac{\ln(x/3)}{x-3}}$.

לפי לופיטל: $\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{1/x}{1}=\frac{1}{3}$.

מרציפות e^x הגבול הוא $e^{1/3}=\sqrt[3]{e}$.

תשובה: $\sqrt[3]{e}$

שאלה 2א פתרון רשמי

$f(\pi)=e^0=1$.

לפי כלל השרשרת: $f'(x)=e^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}\cdot\frac{\cos x\cos^2 x+2\sin^2 x\cos x}{\cos^4 x}$.

בהצבה: $f'(\pi)=1\cdot\frac{(-1)^3+0}{(-1)^4}=-1$.

משוואת המשיק: $y=1-(x-\pi)=-x+1+\pi$.

תשובה: $y=-x+1+\pi$

שאלה 2ב פתרון רשמי

נסמן $f(x)=\ln(1+x)$. לפי טיילור עם שארית לגרנז׳, לכל $x>0$ קיים $c\in(0,x)$ כך ש־
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$.

$f'=\frac{1}{1+x}$, $f''=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''=\frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}=-\frac{6}{(1+x)^4}$.

כיוון ש־$c>0$: $6<\frac{6}{(1+c)^4}<6$, ולכן $0<f^{(4)}(c)<6$ ו־$0>-6$ ו־$-\frac{x^4}{4}<\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4<0$.

הצבה בנוסחת טיילור נותנת את שני האי־שוויונות.

תשובה: הוכחה באמצעות שארית לגרנז׳ מסדר 4.

שאלה 2ג פתרון רשמי

$f(1)=0$.

נגזרת מימין: $\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\sin^2(\pi x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\sin^2(\pi x)=0$.

נגזרת משמאל (לופיטל): $\lim_{x\to1^-}\frac{x\sin^2(\pi x)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\left(\sin^2(\pi x)+2\pi x\sin(\pi x)\cos(\pi x)\right)=0$.

שתי הנגזרות החד־צדדיות קיימות ושוות 0, לכן f גזירה ב־$x=1$ ו־$f'(1)=0$.

הערה: בפתרון הרשמי נכתב בטעות x=π במקום x=1 בשורת הסיכום.

תשובה: הטענה נכונה, $f'(1)=0$.

שאלה 3א פתרון רשמי

נציב $u=1-x$, הגבולות $x=0\mapsto u=1$, $x=1\mapsto u=0$; $dx=-du$.

האינטגרל הופך ל־$\int_0^1(4-u)^2u^{121}\,du=\int_0^1\left(u^{123}-8u^{122}+16u^{121}\right)du$.

לכן התוצאה $\frac{1}{124}-\frac{8}{123}+\frac{16}{122}$.

תשובה: $\frac{1}{124}-\frac{8}{123}+\frac{16}{122}$

שאלה 3ב פתרון רשמי

$V=\pi\int_2^{2\sqrt3}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

נציב $x=2\tan\theta$, $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$, $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$: $V=\frac{\pi}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$.

נציב $u=\sin\theta$: $V=\frac{\pi}{4}\int_{\sqrt2/2}^{\sqrt3/2}\frac{du}{u^2}=\frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{u}\right]_{\sqrt2/2}^{\sqrt3/2}=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt2-\frac{2}{\sqrt3}\right)$.

כלומר $V=\pi\left(\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt3}{6}\right)$.

תשובה: $\pi\left(\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt3}{6}\right)$

שאלה 4א פתרון רשמי

f רציפה בכל $\mathbb{R}$, לכן אין אסימפטוטות אנכיות.

כאשר $x \to \infty$: $e^{-2x} \to 0$ ו־$\sin^2 x$ חסומה, לכן $\frac{f(x)}{x} \to 3$ ו־$f(x) - 3x = e^{-2x}\sin^2 x \to 0$: אסימפטוטה משופעת $y = 3x$.

כאשר $x \to -\infty$: על $a_n = -\pi n$ מתקיים $\frac{f(a_n)}{a_n} = 3$, אך על $b_n = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ מתקיים $\frac{f(b_n)}{b_n} = 3 - \frac{e^{\pi + 4\pi n}}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to -\infty$.

לכן $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ אינו קיים, ואין אסימפטוטה (משופעת או אופקית) ב־$-\infty$.

הערה: בפתרון הרשמי יש בלבול סימנים בכתיבת הגבולות ($x \to -\infty$ במקום $x \to \infty$); הפתרון כאן מתוקן.

תשובה: אין אנכיות; $y = 3x$ משופעת ב־$+\infty$; אין אסימפטוטה ב־$-\infty$.

שאלה 4ב פתרון רשמי

g גזירה אינסוף פעמים. $g'(x) = 2x - 4\arctan x - \frac{4x}{x^2+1} + 2x = \frac{4x}{x^2+1} - 4\arctan x$.

$g''(x) = 2 - \frac{4}{x^2+1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x^2+1}$.

$g'' \geq 0$ עבור $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ו־$g'' < 0$ עבור $x \in (-1, 1)$.

תשובה: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

שאלה 5 פתרון רשמי

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, וזווית החצי היא $\frac{\pi}{6}$, לכן $h = \frac{\sqrt{3}}{3} r = \tan\frac{\pi}{6}$ ו־$V = \frac{\pi h^3}{9}$.

לפי כלל השרשרת: $V' = \frac{\pi h^2 h'}{3}$, כלומר $h' = \frac{3V'}{\pi h^2}$.

ברגע הפתיחה: $\frac{\pi h^3}{9} = 3\pi \Rightarrow h = 3$, ו־$V' = -2$.

לכן $h' = \frac{3\cdot(-2)}{9\pi} = -\frac{2}{3\pi}$ (דצימטר לשנייה).

תשובה: המפלס יורד בקצב $\frac{2}{3\pi}$ דצ"מ לשנייה ($h' = -\frac{2}{3\pi}$).

שאלה 6 פתרון רשמי

נגדיר $g(x) = f(x+1) - f(x)$, רציפה. מספיק למצוא $a \in [0,1]$ עם $g(a) = 0$.

מהמחזוריות $f(2) = f(0)$, ולכן $g(0) = f(1) - f(0)$ ו־$g(1) = f(2) - f(1) = -g(0)$.

אם $g(0) = 0$ ניקח $a = 0$. אחרת $g(0)g(1) = -g(0)^2 < 0$, ולפי משפט ערך הביניים קיים $a \in (0,1)$ עם $g(a) = 0$.

תשובה: מתקבל מערך הביניים עבור $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

תשע״ה · סמסטר א׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **145**

שאלה 1א פתרון רשמי

נכפיל ונחלק בצמוד $\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n}$: המונה הופך ל־$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$.

נחלק מונה ומכנה ב־n: $\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{2}$.

מרציפות $\ln$ ו־$\cos$: $\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \to \cos(\ln 1) = \cos 0 = 1$.

לפי אריתמטיקה של גבולות הגבול הוא $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$.

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 1ב פתרון רשמי

נרשום $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{n}{n^2+k^2}$.

זהו סכום רימן של $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ על $[0,1]$ עבור החלוקה השווה $x_k=\frac{k}{n}$.

לכן הגבול שווה $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

תשובה: $\frac{\pi}{4}$

שאלה 2א פתרון רשמי

$f(-2) = \sqrt[3]{\frac{7}{7}} = 1$.

לפי כלל השרשרת: $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{5-x}{x^2+3}\right)^{-2/3}\cdot\frac{x^2-10x-3}{(x^2+3)^2}$.

בהצבה: $f'(-2) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{21}{49} = \frac{1}{7}$.

משוואת המשיק: $y = 1+\frac{1}{7}(x+2) = \frac{x}{7}+\frac{9}{7}$.

תשובה: $y = \frac{x}{7}+\frac{9}{7}$

שאלה 2ב פתרון רשמי

לכל $x\neq 1,2$ הפונקציה רציפה כהרכבה וסכום של פונקציות רציפות.

ב־$x=1$: $\frac{1}{(x-1)^2}\to\infty$ ולכן $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\pi}{2}+e^{-1} \neq 1 = f(1)$. זו אי־רציפות סליקה.

ב־$x=2$: משמאל $\frac{1}{x-2}\to-\infty$ ולכן $f(x)\to \arctan 1 + 0 = \frac{\pi}{4}$; מימין $\frac{1}{x-2}\to+\infty$ ולכן $f(x)\to\infty$.

לכן ב־$x=2$ יש אי־רציפות עיקרית (מסוג שני).

תשובה: $x=1$ אי־רציפות סליקה; $x=2$ אי־רציפות מסוג שני.

שאלה 2ג פתרון רשמי

בסביבה של $\sqrt{\pi}$: $f(x)=\sin(x^2)$ עבור $\sqrt{\pi/2}<x<\sqrt{\pi}$, ו־$f(x)=-\sin(x^2)$ עבור $\sqrt{\pi}<x<\sqrt{3\pi/2}$, ו־$f(\sqrt{\pi})=0$.

נגזרת משמאל (לופיטל): $\lim_{x\to\sqrt{\pi}^-}\frac{\sin(x^2)}{x-\sqrt{\pi}}=\lim 2x\cos(x^2)=-2\sqrt{\pi}$.

נגזרת מימין: $\lim_{x\to\sqrt{\pi}^+}\frac{-\sin(x^2)}{x-\sqrt{\pi}}=2\sqrt{\pi}$.

הנגזרות החד־צדדיות שונות, ולכן הטענה לא נכונה.

תשובה: הטענה שגויה: f אינה גזירה ב־$\sqrt{\pi}$.

שאלה 3א פתרון רשמי

אינטגרציה בחלקים: $\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx$.

שוב בחלקים: $\int 2x\cos x\,dx=2x\sin x-\int 2\sin x\,dx=2x\sin x+2\cos x$.

לכן האינטגרל שווה $\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^{\pi}=(\pi^2-2)-2=\pi^2-4$.

תשובה: π^2-4

שאלה 3ב פתרון רשמי

פירוק לשברים חלקיים: $\frac{12x^3+11x^2+8x+12}{x^2(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$.

השוואת מקדמים: $4B=12,\ 4A=8,\ B+D=11,\ A+C=12$, ולכן $A=2, B=3, C=10, D=8$.

$\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{10x+8}{x^2+4}\right)dx=2\ln|x|-\frac{3}{x}+5\ln(x^2+4)+4\arctan\frac{x}{2}+C$.

תשובה: $2\ln|x|-\frac{3}{x}+5\ln(x^2+4)+4\arctan\frac{x}{2}+C$

שאלה 4א פתרון רשמי

תחום ההגדרה $(0,\infty)$ ו־f רציפה בו, לכן יש לבדוק רק $x\to 0^+$ ו־$x\to\infty$.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=-\infty$ (כי $\ln x\to-\infty$, $\frac{1}{x^2}\to\infty$), ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

לפי לופיטל: $\lim\frac{\ln x}{x^2}=\lim\frac{1/x}{2x}=0$, ולכן $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x=0$ אנכית (מימין), $y=0$ אופקית ב־$+\infty$.

שאלה 4ב פתרון רשמי

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$; המכנה חיובי ל־$x>0$.

$1-2\ln x$ יורדת ממש ומתאפסת ב־$x=\sqrt{e}$, ולכן f עולה ב־$(0,\sqrt{e})$ ויורדת ב־$(\sqrt{e},\infty)$.

לכן $x=\sqrt{e}$ מקסימום גלובלי, $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$.

כיוון ש־$\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, אין ל־$f$ מינימום גלובלי.

תשובה: מקסימום גלובלי ב־$x=\sqrt{e}$; אין מינימום גלובלי.

שאלה 5 פתרון רשמי

נפח הקופסה: $f(x)=x(L-2x)^2$ עבור $x\in[0,\frac{L}{2}]$.

f רציפה בקטע סגור ולכן מקבלת מקסימום (ויירשטראס); $f(0)=f(\frac{L}{2})=0$ ו־$f>0$ בפנים, לכן המקסימום בנקודה פנימית שבה $f'=0$.

$x=\frac{L}{2} \iff f'(x)=(L-2x)^2-4x(L-2x)=12x^2-8Lx+L^2=0$ או $x=\frac{L}{6}$.

לכן המקסימום ב־$x=\frac{L}{6}$: $f\left(\frac{L}{6}\right)=\frac{L}{6}\cdot\left(\frac{2L}{3}\right)^2=\frac{2L^3}{27}$.

תשובה: $\frac{2L^3}{27}$ (עבור $x=\frac{L}{6}$)

שאלה 6 פתרון רשמי

לפי לגרנז׳, לכל $n\geq 1$ קיים $c_n\in(0,2n)$ כך ש־$f'(c_n)=\frac{f(2n)-f(0)}{2n}=\frac{\pi^{2n}-1}{2n}$.

לפי לופיטל $\lim\frac{\pi^{2x}-1}{2x}=\lim\frac{2\ln\pi\cdot\pi^{2x}}{2}=\infty$, ולכן גם $\frac{\pi^{2n}-1}{2n}\to\infty$.

כלומר $f'(c_n)\to\infty$, ולכן f' אינה חסומה.

תשובה: $f'(c_n)=\frac{\pi^{2n}-1}{2n}\to\infty$, לכן f' לא חסומה.

תשע״ד · סמסטר ב׳ · מועד א׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **147**

שאלה 1 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפעיל את משפט לגרנז׳ על $\ln x$ בקטע $[b,a]$. הפונקציה רציפה ב־$[b,a]$ וגזירה ב־(b,a), כי היא רציפה וגזירה בכל $(0,\infty)$.

לפי לגרנז׳ קיים $c\in(b,a)$ כך שמתקיים

$$\ln a-\ln b=\frac{a-b}{c}.$$

מכיוון ש־$b<c<a$, נובע $\frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{1}{b}$, ולכן (כי $a-b>0$)

$$\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{c}<\frac{a-b}{b}.$$

כלומר

$$1-\frac{b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a}{b}-1,$$

ובפרט האי־שוויונות החלשים מתקיימים.

תשובה: נובע ממשפט לגרנז׳ עבור $\ln x$ בקטע $[b,a]$.

שאלה 2א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נראה שהסדרה מונוטונית וחסומה. מתקיים $a_2 = \sin 2 \in (0,1]$, ולכל $0 < x \le 1$ מתקיים $0 < \sin x < x \le 1$, ולכן באינדוקציה

$$0 < a_{n+1} < a_n \le 1$$

לכל $n \ge 2$.

הסדרה (החל מ־$n = 2$) יורדת וחסומה מלרע ע"י 0, ולכן מתכנסת לגבול $L \in [0,1]$.

מרציפות $\sin$ ב־$\mathbb{R}$ נקבל $L = \sin L$. הפונקציה $h(x) = x - \sin x$ מקיימת $h'(x) = 1 - \cos x > 0$ ב־$(0,1]$, ולכן $h(x) > h(0) = 0$ שם; הפתרון היחיד ב־$[0,1]$ הוא $L = 0$.

תשובה: מתכנסת, $\lim a_n = 0$.

שאלה 2ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש במשפט הסנדוויץ׳. מתקיים $-a_n \le b_n \le a_n$ לכל n.

מסעיף א $a_n \to 0$, ולכן גם $-a_n \to 0$.

לפי משפט הסנדוויץ׳ $b_n \to 0$.

תשובה: מתכנסת, $\lim b_n = 0$.

שאלה 3א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נשתמש בהצבה $t = \tan \frac{x}{2}$, שעבורה

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

נקבל $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$.

לכן $F(x) = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$ (בדיקה: $F'(x) = \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$).

תשובה: $\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$

שאלה 3ב פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx.$$

נבצע שוב אינטגרציה בחלקים:

$$\int 2x e^{-x} dx = -2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = -2x e^{-x} - 2e^{-x}.$$

לכן

$$G(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

תשובה: $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$

שאלה 4א נבדק על ידי צוות הקורס

נרשום את המונה והמכנה כמכפלות:

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n}.$$

כל גורם פרט לראשון קטן או שווה ל־1, ולכן $0 < a_n \le \frac{1}{n}$.

לפי הסנדוויץ׳ $a_n \to 0$.

תשובה: מתכנסת ל־0.

שאלה 4ב נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של 1^∞, ולכן אין שימוש מיידי באריתמטיקה של גבולות. נרשום

$$\frac{n^2+3n+5}{n^2-2n+7} = 1 + \frac{5n-2}{n^2-2n+7},$$

ונסמן $c_n = \frac{5n-2}{n^2-2n+7} \to 0$.

מתקיים

$$b_n = \left[(1+c_n)^{1/c_n}\right]^{3nc_n},$$

כאשר $(1+c_n)^{1/c_n} \to e$.

בנוסף

$$3nc_n = \frac{15n^2-6n}{n^2-2n+7} \to 15,$$

ולכן, מרציפות e^x ב־$\mathbb{R}$ ו־$\ln x$ ב־$(0,\infty)$, $b_n \to e^{15}$.

תשובה: מתכנסת ל־e^{15}.

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח קיום ויחידות. קיום: מתקיים

$$p(-1) = -1 - 7 + 8 = 0,$$

כלומר $x = -1$ שורש.

יחידות: מתקיים

$$p'(x) = 3x^2 + 7 > 0$$

לכל x, ולכן p עולה ממש ויש לה לכל היותר שורש אחד (אחרת, כיוון ש־p רציף ב־$\mathbb{R}$ כפולינום, לפי רול הייתה נקודה עם $p' = 0$).

תשובה: השורש היחיד הוא $x = -1$.

שאלה 6א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה היכן f אינה מוגדרת: ב־$x=1$ ובנקודה שבה $2^{\frac{x}{1-x}}=4$, כלומר

$$\frac{x}{1-x}=2 \iff x=\frac{2}{3}.$$

בשאר הנקודות f רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס.

בנקודה $x=\frac{2}{3}$ המכנה שואף ל־0 והמונה ל־3, ולכן $f\to+\infty$ משמאל ו־$f\to-\infty$ מימין: אי־רציפות מסוג שני.

כאשר $x\to 1^-$: $\frac{x}{1-x}\to+\infty$, $2^{\frac{x}{1-x}}\to\infty$ ולכן $f\to 0$. כאשר $x\to 1^+$: $\frac{x}{1-x}\to-\infty$, $2^{\frac{x}{1-x}}\to 0$ ולכן $f\to\frac{3}{4}$.

הגבולות החד־צדדיים ב־$x=1$ סופיים ושונים: אי־רציפות מסוג ראשון (קפיצה).

תשובה: $x=\frac{2}{3}$: מסוג שני; $x=1$: מסוג ראשון (קפיצה).

שאלה 6ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה את הנקודות $x\neq 0$: בהן הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה אינו מתאפס.

נחשב את הגבול ב־0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}=\frac{5}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{7}\neq 2=f(0).$$

הגבול קיים וסופי אך שונה מערך הפונקציה: אי־רציפות סליקה ב־$x=0$.

תשובה: $x=0$: אי־רציפות סליקה.

תשע״ד · סמסטר א׳ · מועד ב׳

השאלות של בחינה זו מתחילות בעמוד **148**

שאלה 1א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

זהו מקרה של $0\cdot\infty$, ולכן נרשום

$$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\cdot\sin x.$$

נציב $t:=\frac{\pi}{2}-x\to 0^+$, ולכן $\cos x=\sin t$,

$$\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}=\frac{t}{\sin t}\to 1.$$

מכיוון ש־$\sin$ רציפה ב־$\mathbb{R}$, מתקיים $\sin x\to 1$, ולכן הגבול הוא 1.

תשובה: 1

שאלה 1ב נבדק על ידי צוות הקורס

נראה תחילה באינדוקציה ש־$a_n > 0$ לכל n ($a_1 = 4 > 0$, וסכום של חיוביים חלקי 2 חיובי), ולכן הגבול L מקיים $L \geq 0$.

נשאיף $n \to \infty$ בנוסחת הנסיגה:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{5}{L}\right)$$

(אפשר לחלק ב־L כי $a_n \geq \sqrt{5}$ לפי אי־שוויון הממוצעים, ולכן $L \geq \sqrt{5} > 0$).

מכאן

$$2L = L + \frac{5}{L},$$

כלומר $L^2 = 5$ ו־$L = \sqrt{5}$.

תשובה: $\sqrt{5}$

שאלה 2א פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נפצל את האינטגרל לשני חלקים:

$$\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x},$$

ונותר

$$J = \int \cos(2x)e^{-3x}dx.$$

אינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$J = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x - \frac{2}{3}\int \sin(2x)e^{-3x}dx,$$

וכן

$$\int \sin(2x)e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 2x + \frac{2}{3}J.$$

לכן

$$J = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{-3x}\sin 2x - \frac{4}{9}J,$$

כלומר $\frac{13}{9}J = \frac{e^{-3x}}{9}(2\sin 2x - 3\cos 2x)$ ולכן

$$J = \frac{e^{-3x}(2\sin 2x - 3\cos 2x)}{13}.$$

בסך הכול: $\int(1+\cos 2x)e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{e^{-3x}(2\sin 2x - 3\cos 2x)}{13} + C$.

תשובה: $-\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{e^{-3x}(2\sin 2x - 3\cos 2x)}{13} + C$

שאלה 2ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נחשב תחילה את האינטגרל בהצבה. נרשום $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$, ונציב $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cos^3 x\, dx = \int_0^1 t^{2n}(1-t^2)dt.$$

מכאן שהאינטגרל שווה

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

לכן

$$n^2 \cdot \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2}{4n^2+8n+3} \to \frac{1}{2}.$$

תשובה: $\frac{1}{2}$

שאלה 2ג

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נגזור לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת (הפונקציה f רציפה ב־$\mathbb{R}$ כי היא גזירה בו):

$$g'(x) = f(xf(x)) \cdot (xf(x))' = f(xf(x)) \cdot (f(x) + xf'(x)).$$

עבור $x = 2$ מתקיים $xf(x) = 2 \cdot 3 = 6$, וכן

$$f(2) + 2f'(2) = 3 + 10 = 13.$$

לכן

$$g'(2) = f(6) \cdot 13 = \frac{13}{2}.$$

תשובה: $g'(2) = \frac{13}{2}$

שאלה 2ד

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה את נקודות החיתוך:

$$x^2 = 2|x| \Rightarrow x = 0, \pm 2.$$

התחום סימטרי ביחס לציר y, ובחלק $x \in [0,2]$ הוא $x^2 \le y \le 2x$.

בשיטת הדיסקות (טבעות):

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^2 \left((2x)^2 - (x^2)^2\right)dx = 2\pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx.$$

נחשב ונקבל

$$V = 2\pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 2\pi\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{128\pi}{15}.$$

תשובה: $\frac{128\pi}{15}$

שאלה 3א

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נוכיח קיום בעזרת משפט ערך הביניים ויחידות בעזרת מונוטוניות. נגדיר

$$h(x) = 1 + x + e^x,$$

רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות רציפות וגזירות.

קיום: מתקיים $h(-2) = -1 + e^{-2} < 0$ ו־$h(0) = 2 > 0$, ולפי משפט ערך הביניים קיים שורש ב־$(-2, 0)$.

יחידות: מתקיים $h'(x) = 1 + e^x > 0$, ולכן h עולה ממש ויש לה לכל היותר שורש אחד.

תשובה: קיים שורש יחיד a, והוא בקטע $(-2, 0)$.

שאלה 3ב

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק תחילה אסימפטוטות אנכיות. הפונקציה f מוגדרת ורציפה לכל $x \neq a$ כמנה של פונקציות רציפות שהמכנה שלה מתאפס רק ב־a.

כיוון ש־$a \in (-2, 0)$, המונה $ae^a \neq 0$ והמכנה מתאפס, ולכן $\lim_{x \to a^{\pm}} |f(x)| = \infty$:

$x = a$ אסימפטוטה אנכית.

עבור $x \to +\infty$ מתקיים

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{1 + x + e^x} = \frac{1}{(1 + x)e^{-x} + 1} \to 1.$$

בנוסף מתקיים

$$f(x) - x = \frac{xe^x - x - x^2 - xe^x}{1 + x + e^x} = -\frac{x + x^2}{1 + x + e^x} \to 0$$

(כי e^x גדל מהר מכל פולינום), ולכן $y = x$ אסימפטוטה משופעת ב־$+\infty$.

עבור $x \to -\infty$ מתקיים $xe^x \to 0$ ו־$1 + x + e^x \to -\infty$, ולכן $f(x) \to 0$: $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב־$-\infty$.

תשובה: $x = a$ אנכית; $y = x$ משופעת ב־$+\infty$; $y = 0$ אופקית ב־$-\infty$.

שאלה 4

פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבטא את a באמצעות b: $a = \frac{16}{b}$, ולכן יש למזער

$$h(b) = \frac{16}{b} + b^2$$

עבור $b > 0$.

הנגזרת מתאפסת כאשר

$$h'(b) = -\frac{16}{b^2} + 2b = 0 \iff b^3 = 8 \iff b = 2.$$

מתקיים $h' < 0$ ל־$0 < b < 2$ ו־$h' > 0$ ל־$b > 2$, ולכן $b = 2$ מינימום מוחלט ב־$(0, \infty)$.

אז $a = 8$ והערך המינימלי $a + b^2 = 12$.

תשובה: $a = 8,\ b = 2$ (הערך המינימלי 12).

שאלה 5 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נבדוק את סימן הנגזרת השנייה. נפתח את הסוגריים:

$$f(x) = e^{2ax+2} + 2e^{ax+1} + 1 + x^2.$$

נגזור פעמיים:

$$f'(x) = 2ae^{2ax+2} + 2ae^{ax+1} + 2x,$$
$$f''(x) = 4a^2e^{2ax+2} + 2a^2e^{ax+1} + 2.$$

לכל a ולכל x: $f''(x) \geq 2 > 0$, ולכן f קמורה כלפי מעלה בכל $\mathbb{R}$.

תשובה: לכל $a \in \mathbb{R}$.

שאלה 6 פתרון שלא נבדק על ידי צוות הקורס

נמצא תחילה את נקודות המינימום. מתקיים $f(x) \geq 0$ לכל x, ולכן כל נקודה שבה $f = 0$ היא נקודת מינימום מקומי (ואף מוחלט): זה מתקיים ב־$x = 0$ ובכל x אי־רציונלי.

נקודה רציונלית $x_0 \neq 0$: $f(x_0) = x_0^2 > 0$, ובכל סביבה שלה יש אי־רציונליים עם $f = 0 < f(x_0)$, ולכן היא אינה מינימום מקומי.

היא גם אינה מקסימום מקומי: בכל סביבה יש רציונליים x עם $|x| > |x_0|$, שעבורם $f(x) = x^2 > x_0^2$.

לכן נקודות הקיצון המקומיות הן נקודות מינימום מקומי: $x = 0$ וכל האי־רציונליים; אין נקודות מקסימום מקומי.

הערה: הפתרון מניח את ההגדרה הלא־חריפה של קיצון מקומי ($f(x) \leq f(x_0)$ בסביבה). לפי ההגדרה החריפה אין לפונקציה נקודות קיצון כלל.

תשובה: מינימום מקומי (לא חריף) ב־$x = 0$ ובכל $x \notin \mathbb{Q}$; אין מקסימום מקומי.